高等学校数学科採点基準

【注意】問題によっては，部分点を可とする。

問題番号		正　答〔例〕	採点上の注意	配　点	
1	（1）	４回のうち５の目が３回以上出るのは， ５の目がちょうど３回出る，または５の目が４回出る場合である。 ５の目がちょうど３回出る確率は $_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{20}{1296}$ ５の目が４回出る確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$ これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は $\frac{20}{1296}+\frac{1}{1296}=\frac{21}{1296}=\frac{7}{432}$		１０	２１
	（2）	Ａ組の通学時間の第３四分位数は 40 分より小さいから，Ａ組の通学時間が 40 分以上の生徒は８人以下である。 　Ｂ組の通学時間の第３四分位数は 40 分より大きいから，Ｂ組の通学時間が 40 分以上の生徒は９人以上である。 　したがって，通学時間が 40 分以上の生徒の人数はＢ組よりＡ組の方が少ないと判断することができる。		１１	
2		条件 p，q を満たす集合をそれぞれ P，Q とすると $P=\{x \mid a-2<x<a+2\}$ $Q=\{x \mid x>5\}$ 命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，$P \subset Q$ が成り立つことと同じであるから $5 \leqq a-2$ したがって，求める a の値の範囲は $a \geqq 7$		１２	
3		$\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ であるから $(\sqrt{3}-i)^{-12}=2^{-12}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-12}$ $=2^{-12}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ $=2^{-12}\cdot 1=\frac{1}{4096}$		１２	

高等学校数学科採点基準

【注意】問題によっては，部分点を可とする。

問題番号	正　答〔例〕	採点上の注意	配点
$\boxed{4}$	1から1000までの自然数のうち，5，5^2，5^3，5^4 の倍数の個数はそれぞれ 200，40，8，1 である。 よって，Nを素因数分解したとき $5^5 = 3125 > 1000$ であるから，素因数 5 の個数は $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ である。 また，1から1000までの自然数のうち，2の倍数の個数は500であることから，Nを素因数分解したときの素因数 2 の個数は 249 より多い。 $2 \times 5 = 10$ であるから，Nを計算すると 末尾には 0は連続して 249 個並ぶ。		15
$\boxed{5}$	真数は正であるから，$2 - x > 0$ かつ $x > 0$ すなわち，$0 < x < 2$ ……① 与えられた不等式を変形すると，$\log_a (2-x)^2 < \log_a x$ [1]　$a > 1$ のとき 底は1より大きいから $(2-x)^2 < x$ $x^2 - 5x + 4 < 0$ $(x-1)(x-4) < 0$ よって，$1 < x < 4$ ……② ①，②より $1 < x < 2$ [2]　$0 < a < 1$ のとき 底は1より小さいから $(2-x)^2 > x$ $x^2 - 5x + 4 > 0$ $(x-1)(x-4) > 0$ よって，$x < 1$，$4 < x$ ……③ ①，③より $0 < x < 1$ [1]，[2] より $0 < a < 1$ のとき　$0 < x < 1$ $a > 1$ のとき　$1 < x < 2$		15
$\boxed{6}$	$x^2 + y^2 = 1$ ……①，$x^2 + y^2 + 8x - 6y + k = 0$ ……②とする。 円①の中心は原点，半径は1である。 また，②を変形すると，　$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25 - k$ 円②の中心は点 $(-4,\ 3)$，半径は $\sqrt{25-k}$ である。 円①，②の中心間の距離は，$\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ 円①と円②が接するのは，「円①と円②が外接するとき」と「円①が円②に内接するとき」に限られる。 [1]　円①と円②が外接するとき $5 = 1 + \sqrt{25-k}$ $4 = \sqrt{25-k}$ ……③ 両辺を2乗すると，$16 = 25 - k$　　よって，$k = 9$ これは③を満たす。 [2]　円①が円②に内接するとき $5 = \sqrt{25-k} - 1$ $6 = \sqrt{25-k}$ ……④ 両辺を2乗すると，$36 = 25 - k$　　よって，$k = -11$ これは④を満たす。 したがって，求める k の値は　$k = -11,\ 9$		15

高等学校数学科採点基準

【注意】問題によっては，部分点を可とする。

問題番号	正　　答　〔例〕	採点上の注意	配　点
7	$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ax\sin x+2ab\sin x\cos x$ $+2bx\cos x)\,dx$ ここで，x^2，$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$x\sin x$ は偶関数であり $\sin x\cos x$，$x\cos x$ は奇関数であるから $I=2\int_0^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ax\sin x)\,dx$ $=2\int_0^{\pi}\left(x^2+a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$ $+4a\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$ $=\int_0^{\pi}(2x^2+a^2+b^2-a^2\cos 2x+b^2\cos 2x)\,dx$ $+4a\int_0^{\pi}x(-\cos x)'dx$ $=\left[\frac{2}{3}x^3+a^2x+b^2x-\frac{a^2}{2}\sin 2x+\frac{b^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$ $+4a\left([x(-\cos x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)$ $=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2+4\pi a+4a[\sin x]_0^{\pi}$ $=\pi a^2+4\pi a+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3$ $=\pi(a+2)^2+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi$ a，b は実数であるから，$(a+2)^2\geqq 0$，$b^2\geqq 0$ したがって，I は $a=-2$，$b=0$ のとき　最小値 $\frac{2}{3}\pi^3-4\pi$ をとる。		１５
8	$P(x)=x^5+x^4-18x^3+21x^2+7x-2$ とすると $P(2)=0$ よって，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから $P(x)=(x-2)(x^4+3x^3-12x^2-3x+1)$ $P(x)=0$ から $x-2=0$ または $x^4+3x^3-12x^2-3x+1=0$ $x=0$ は $x^4+3x^3-12x^2-3x+1=0$ の解ではないから $x^4+3x^3-12x^2-3x+1=0$ の両辺を x^2 で割ると $x^2+3x-12-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ すなわち，$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-12=0$ $x-\frac{1}{x}=X$ とおくと $X^2+3X-10=0$ $(X+5)(X-2)=0$ $X=-5$，2 $x-\frac{1}{x}=-5$ のとき，$x^2+5x-1=0$ より，$x=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$ $x-\frac{1}{x}=2$ のとき，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ したがって $x=2$，$\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$，$1\pm\sqrt{2}$		１５

高等学校数学科採点基準

【注意】問題によっては，部分点を可とする。

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th colspan="2">正　　答　〔例〕</th><th>採 点 上 の 注 意</th><th colspan="2">配　点</th></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td colspan="2">2点A，B は xy 平面に関して同じ側にある。
xy 平面に関して点Aと対称な点をCとすると　C$(-2,\ 1,\ -3)$
$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$ より $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{CP}+\mathrm{BP}\geqq \mathrm{CB}$
よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ が最小となるとき
点Pは直線CBと xy 平面との交点である。
点Pは直線CB上にあるから
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となる実数 t がある。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-2,\ 1,\ -3)+t(8,\ 4,\ 4)$
$\quad=(-2+8t,\ 1+4t,\ -3+4t)$ ……①

また，点Pは xy 平面上の点であるから，$-3+4t=0$
よって，$t=\dfrac{3}{4}$
①に代入すると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 4,\ 0)$
したがって，P$(4,\ 4,\ 0)$</td><td></td><td colspan="2">15</td></tr>
<tr><td rowspan="3">10</td><td rowspan="2">(1)</td><td>(ア)</td><td>命題「すべての自然数 n について，n^3+2n は3の倍数である。」を①とする。
[1] $n=1$ のとき $n^3+2n=1^3+2\cdot 1=3$
よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。
[2] $n=k$ のとき①が成り立つ，すなわち k^3+2k は3の倍数であると仮定すると，ある整数 m を用いて $k^3+2k=3m$ と表される。
$n=k+1$ のときを考えると
$(k+1)^3+2(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)$
$=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$
$=3m+3(k^2+k+1)$
$=3(m+k^2+k+1)$
$m+k^2+k+1$ は整数であるから
$(k+1)^3+2(k+1)$ は3の倍数である。
よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。
[1]，[2] から，①は成り立つ。</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">各
15
×
2</td><td rowspan="3">40</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td>命題「すべての自然数 n について，n^3+2n は3の倍数である。」を①とする。
すべての自然数 n は
$n=3k-2$，$n=3k-1$，$n=3k$（k は自然数）
のいずれかの形で表される。
[1] $n=3k-2$ のとき
$n^3+2n=(3k-2)^3+2(3k-2)$
$=27k^3-54k^2+42k-12$
$=3(9k^3-18k^2+14k-4)$
$9k^3-18k^2+14k-4$ は整数であるから n^3+2n は3の倍数である。
[2] $n=3k-1$ のとき
$n^3+2n=(3k-1)^3+2(3k-1)$
$=27k^3-27k^2+15k-3$
$=3(9k^3-9k^2+5k-1)$
$9k^3-9k^2+5k-1$ は整数であるから n^3+2n は3の倍数である。
[3] $n=3k$ のとき
$n^3+2n=27k^3+6k=3(9k^3+2k)$
$9k^3+2k$ は整数であるから n^3+2n は3の倍数である。
[1]，[2]，[3] から，①は成り立つ。</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">ドミノ倒しの例を挙げ，ドミノが全部倒れることを確認するには，1番目の牌が倒れることと，どの牌についてもある牌が倒れれば次の牌も倒れることを確認すればよいことを通して，数学的帰納法による証明の仕組みを理解させる。</td><td>内容を正しくとらえていれば，表現は異なっていてもよい。</td><td>10</td></tr>
</table>

高等学校数学科採点基準

【注意】問題によっては，部分点を可とする。

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　　答　〔例〕</th><th>採 点 上 の 注 意</th><th colspan="2">配　点</th></tr>
<tr><td rowspan="2">11</td><td>（1）</td><td>三角形ABCの ∠A，∠B，∠Cの大きさをそれぞれ，
A，B，Cとする。

正弦定理により
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{1}{\sin C}=2$

$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$B=60^\circ$，120°
よって，$0^\circ < C < 120^\circ$
$\sin C=\dfrac{1}{2}$ より，$C=30^\circ$

[1] $B=60^\circ$，$C=30^\circ$ のとき
$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$
[2] $B=120^\circ$，$C=30^\circ$ のとき
$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

よって，$A=30^\circ$，90°</td><td></td><td>5</td><td rowspan="2">１５</td></tr>
<tr><td>（2）</td><td>$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすBは60°または120°であることから
$\sin C=\dfrac{1}{2}$ を満たすCは30°になることに着目させ，問題の条件を満たす三角形が複数存在することに気付かせる。さらに，実際に図をかかせることによりこのことを実感させ，数学的な表現を用いて，論理的に考察し表現させる。</td><td>内容を正しくとらえていれば，表現は異なっていてもよい。</td><td>１０</td></tr>
<tr><td colspan="2">12</td><td>「微分・積分の考え」において，正方形状の厚紙の四隅から合同な正方形を切り抜いて，ふたのない直方体の箱を作るとき，箱の容積を最大にするには，どのような形状の箱にすればよいかを考える問題を取り扱う。その後，元の正方形の大きさを変えた場合に，容積が最大となる箱の形状はどのようになるかを考察させたり，考察した結果から共通する性質を見いださせたりする。</td><td>問いを正しくとらえていれば，内容は異なっていてよい。</td><td colspan="2">１０</td></tr>
</table>