数学的な思考力・表現力を育成する算数科指導の工夫

―　「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動を通して　―

神石高原町立三和小学校　飯干　新

研究の要約

本研究は，「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動を通して，数学的な思考力・表現力を育成する算数科指導の工夫について考察したものである。文献から「自力解決」で，問題をイメージして立式するため，解法を選択させたり，誤った解法を正させたりすることが有効であり，「練り上げ」で，児童の表現を一部提示し，表現の意図や意味を考えさせたりすることが，多様な表現を関連付けて考え，説明し合う活動を促すことが分かった。そこで，これらの工夫を取り入れた授業モデルを作成し，第３学年「計算の工夫」の単元で研究授業を行った。その結果，児童が筋道を立てて考え，多様な表現を関連付けて表現することができるようになった。このことから，「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動を行うことは，数学的な思考力・表現力を育成する上で有効であることが分かった。

キーワード：数学的な思考力・表現力　関連付け

Ⅰ　算数科教育における現状と課題

中央教育審議会平成20年１月答申（以下，答申とする。）では，国際調査などの結果から，知識・技能の活用など思考力・判断力・表現力等に課題があることを指摘している。「全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ」（平成24年）においても同様に，過去４年間の平均正答率が，主に「知識」に関するＡ問題は76.9％であるのに対して主に「活用」に関するＢ問題が55.0％と基礎的・基本的な知識・技能を活用する点に課題があることが報告されている。また，平成25年度のＢ問題の「思考・判断・表現」の評価の観点である「数学的な考え方」の正答率は47.0％であり，他の観点と比較しても低く，これらのことは，平成19年度の調査実施以降，継続的な課題となっている。このような課題を受け，思考力・表現力を重視するため，低学年から「数量関係」の領域を設けるように述べている。しかし，平成25年度全国学力・学習状況調査【小学校】算数の結果，「数量関係」の平均正答率は，Ｂ問題で55.1％と低く，「数量関係」の指導に関して，「計算の順序についてのきまりを理解して計算すること」や「解決方法を用いて別の問題の解決方法を考え，それを数や式，言葉を用いて記述すること」などに課題があることが報告されている。

Ⅱ　研究の基本的な考え方

１　数学的な思考力・表現力の育成

(1) 数学的な思考力・表現力とは

片桐重男（2010）は，数学的な考え方の具体的内容こそが算数・数学科で育てたい思考力と述べ，数学的な考え方の具体的内容を次の三つのカテゴリーでまとめている。この数学的な考え方を一覧にし，表１に示す。

表１　数学的な考え方一覧

Ⅰ　数学的な態度 自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする。筋道の立った行動をしようとする。よりよいものを求めようとする。
Ⅱ　数学の方法に関係した数学的な考え方 帰納的な考え方，類推的な考え方，演繹的な考え方，統合的な考え方，発展的な考え方，抽象化の考え方，単純化の考え方，一般化の考え方，特殊化の考え方，記号化の考え方，数量化・図形化の考え方
Ⅲ　数学の内容に関係した数学的な考え方 集合の考え，単位の考え，表現の考え，操作の考え，アルゴリズムの考え，概括的把握の考え，基本的性質の考え，関数の考え，式についての考え

算数科の数学的な考え方についての評価の趣旨は，「日常の事象を数理的にとらえ，見通しをもち筋道を立てて考え表現したり，そのことから考えを深め

たりするなど，数学的な考え方の基礎を身に付けている。」[1]であり，筋道を立てて考え表現することが「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料」に示されている。その際に用いられる考え方として小学校学習指導要領解説算数編（平成20年，以下，解説算数編とする。）では，演繹的な考え，帰納的な考え，類推的な考えが挙げられている。これらの考えを熊倉啓之（2011）は，数学的に推論する力とまとめ，他の力の基本と述べている。

そこで本研究では,演繹的な考え,帰納的な考え,類推的な考えを用いて筋道を立てて推論する力を数学的な思考力の基本と捉え，研究の対象とする。

数学的な表現力について，小島宏（2008）は数学的な表現力を「言葉や数，式，図，表，グラフなどを用いて，問題の解決過程における考え方や処理の仕方や結果を分かりやすく表したり，説明したりする能力」[2]と定義している。大澤隆之（平成20年）は，算数の表現には二つの意味があるとし，一つが自分の問題解決のための表現，もう一つが，人に示し説明するための表現であると述べている。そして，学習指導要領で強調されているのは，聞き手を意識した,人に説明するための表現であると述べている。

そこで，本研究では，数学的な表現力を，言葉や数，式，図などを用いて，問題の解決過程における考え方や処理の仕方や結果を分かりやすく表したり，説明したりする能力と捉える。

数学的な思考力と表現力の関係について解説算数編では，「考えを表現する過程で，自分のよい点に気付いたり，誤りに気付いたりすることがあるし，自分の考えを表現することで，筋道を立てて考えを進めたり，よりよい考えを作ったりできるようになる。」[3]と述べられており，「考える能力と表現する能力とは互いに補完しあう関係にある」[4]ことを示している。このことについて，中村光一（2011）は，学習過程で思考活動と表現活動は一体化していない状態から始まり，それらが一体化するように進めることの重要性を示しており，思考と表現は，相乗的に高め合う関係にあると述べている。

これらのことを踏まえて，数学的な思考力・表現力とは，問題解決の過程の中で，演繹的な考え，帰納的な考え，類推的な考えを生かして筋道を立てて考え，様々な数学的表現を用いて説明し合う力であり，数学的な思考力・表現力は補完し合う関係のものであると捉えた。

(2) 数学的な思考力・表現力を育成するために

ア　学習過程とその課題について

では，どのように児童の数学的な思考力・表現力を育成していけばよいのであろうか。数学的な思考力は，問題解決の学習体験を通したとき，最もよく身に付くものであると齋藤昇（平成13年）は述べている。問題解決に基づく教授－学習過程を表す問題解決の過程の一般的なものとして，「問題把握」「自力解決」「練り上げ」「まとめ」の４段階がある。さらに，Mayer (1992) は，「自力解決」には「変換」「統合」「計画」「実行」の４段階があるとしている。そこで，本研究では，問題解決過程の大枠を「問題把握」「自力解決」「練り上げ」「まとめ」とし，更に「自力解決」の過程を「変換」「統合」「計画」「実行」の四つの下位過程に分けて設定する。

坂本美紀（1993）は，問題解決の過程のつまずきの多くは，問題の意味が理解できず，「自力解決」の段階で解決の見通しがもてていないことにあると述べている。また，田中博史（2011）は，「練り上げ」の段階で発言する児童の数が限られており，個の活動頻度が上がっていないことを一般的な課題として挙げている。このことについて,工藤克己(2006)は，考えをしっかりともった児童が代表で発表するが，聞いている他の児童から質問もなく，相互交流が図られておらず，「練り上げ」が深まりをもったものになっていないことを指摘している。

これらのことから，児童に問題の意味を正確に理解させる「自力解決」指導の工夫，個の活動頻度を上げ，児童相互に交流させ，考えを深めさせる「練り上げ」指導の充実を図ることで,数学的な思考力・表現力を育成する手立てとなると考えた。

イ　「自力解決」と「練り上げ」段階の指導工夫

では，「自力解決」の段階において，どのように問題の意味を正確に理解させればよいのだろうか。片桐（2004）は，現象を分かりやすく示すためにグラフや図で表すことが有効であると述べている。また，瀬尾美紀子（2010）は，問題解決の過程で文章全体のイメージを形成する際，まず１文ずつを図などのイメージに変換し，変換したイメージを繋ぎ合わせて統合することで問題の意味を理解するという過程を踏むことを示している。

つまり，「自力解決」では，児童に図などを用いてその問題からイメージを一つ一つ形成させ，統合させる手立てが必要であると言える。

では，「練り上げ」の段階において，どのように個の活動頻度を上げ，児童を相互に交流させ，考えを深めさせていけばよいのだろうか。小島（2008）は，他者の考えを読み取り，関連させながら自分の

考えを吟味したり，よいところを取り入れたりすることで，知的コミュニケーションを図りながら学び合いをさせることや，表現する活動を繰り返し体験させることを思考力・表現力の育成のポイントとして挙げている。また，整った表現を求めるより，表現しようという意欲や表現の中身，論理性，発想のよいところなどの数学的な価値に着目させて意識付けさせることの大切さを主張している。

つまり，「練り上げ」においては，学び合いや表現活動の繰り返しによる個の活動頻度を上げ，その表現への意欲，表現の中身，論理性，発想などの数学的な価値に気付かせ，様々な考えを伝え合い，考えを発展させる工夫が必要である。

これらのことから，数学的な思考力・表現力を育成するには，問題解決的な学習の過程を通して，「自力解決」の段階で問題文の全体のイメージを形成させること，「練り上げ」の段階で互いの問題解決の仕方における数学的な価値に気付かせ，説明し合うことが大切であることが分かった。

２　「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動

(1) 「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動の意義

答申では，領域構成について「数量関係」の領域を低学年から設けるように述べている。その目的は，言葉や数，式，表，グラフなどを用いた思考力・表現力を重視するところにある。片桐（2012）は，学習指導要領の「数量関係」領域全体で式に表したり，式をよんだりすることが強調されている点と述べている。式で表したり，式をよんだりするときにはどのような思考が働いているのだろうか。杉山吉茂（2008）は，式に表すこと，つまり，問題場面を数学の言葉に置き換えることを数理化と呼んでいる。また，式をよむことについては，式の意味だけでなく，式から具体をよむことが重要であると述べている。よって式に表したり,式をよんだりすることは，具体と抽象を行き来する思考が働いていると言える。

しかし式による表現や式をよむことは，抽象的で児童にとってイメージのもちにくい活動である。David C.Webb 他（2008）は，具体的な物や量から離れて形式を受け入れることは極めて困難であることを指摘し，形式化された表現（式や数）を，具体的な表現であるコインやリンゴなどの具体物や，帯や数直線などとつなぐ学習支援の必要性を主張している。このことから，式や数と，具体物や図などを関連付けて考えたり表現したりすることが，理解を促すことが分かった。

また，表現することについて，礒田正美（1996）は，言い換えによってこそ意味が解され，表されるため，多様に考えを表現することが重要であると述べている。このことについて，金本良通（1998）は，「練り上げ」において，様々な考えを互いに関連付けることにより理解を深め，広げていくこと自体に価値を置くことの必要性を指摘している。つまり，多様に考えを出させ，互いの考えを結び付けながら考えを説明し合う活動を取り入れることが数学的な思考力・表現力を高めると考えた。

このことから，「数量関係」における言葉や，数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動によって数学的な思考力･表現力が育成されると考える。

(2) 「数量関係」の領域における言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動の充実を図るために

児童が，言葉や数，式，図などを関連付けて考え説明し合うには,問題の理解をしなくてはならない。瀬尾（2010）は先に述べたように，「自力解決」では，問題をイメージに変換し，そのイメージを統合して，問題全体の理解を図る段階があることを挙げている。その際には，文章題に示された一つずつの条件から問題文の部分のイメージをもたせ，イメージを統合させる工夫が必要と述べている。

イメージを統合させるために，谷本衡亮（2008）は，あえて誤った式を提示し，その演算が誤りである理由を考えさせることが有効であると述べている。

また，有田佳世，森田愛子（2008）は，正しい図と誤った図を児童に提示し，正しい図を選択させる介入が正しい立式に結びつきやすいと述べている。さらに，一部の児童には，文章を正しく言い換えたものと誤って言い換えたものを提示して手がかりとする介入も効果があると述べている。

このように，式や図，言葉による言い換えを提示し，誤りを指摘させたり，正しいものを選択させたりすることが，問題の理解を促すことが分かった。

そこで本研究では，「自力解決」で，言葉や数，式，図などを関連付けて考えることを困難としている児童に対して，次の手立てを行う。まず，問題の中から分かっていること，聞かれていることを児童に問い，正しく捉えられていない場合には，数量関係を整理し，捉え直すよう促す。そして，ヒントカ

ードを提示する。ヒントカードの在り方は，一つは誤った言葉や数，式，図を提示し，その誤りを正させる手立てである。もう一つは，言葉や数，式，図を複数提示し，正しい方を選択させる手立てである。

次に「練り上げ」の段階で，田中（平成13年）は，一人の児童に答えを全て言わせてしまうことが，聞き手の考える場面を奪ってしまうという問題点を挙げており，友達の発表の途中に積極的に関わらせることが大切であると述べている。田中は「友達の発表」としているが，その意図から，話し手が提示した言葉や数，式，図などと拡げる。また，発表の途中で区切ることを，言葉や数，式，図などの断片的な表現の提示とする。この断片的な表現の意味や意図を児童に考えさせることで，言葉や数，式，図などを関連付けて考えることを促す。そして，この関連付ける活動を児童に十分行わせるために，断片的な表現を提示させた際に，その表現の意味や意図を考えて話し合うペアトークを行う。これらのことを通して思考と表現の一体化が図られ，数学的な思考力・表現力が育成されると考える。

(3) 言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う授業モデル

これらのことを基に，児童が言葉や数，式，図などを関連付けて考え説明し合う授業モデルを作成し，図１に示す。

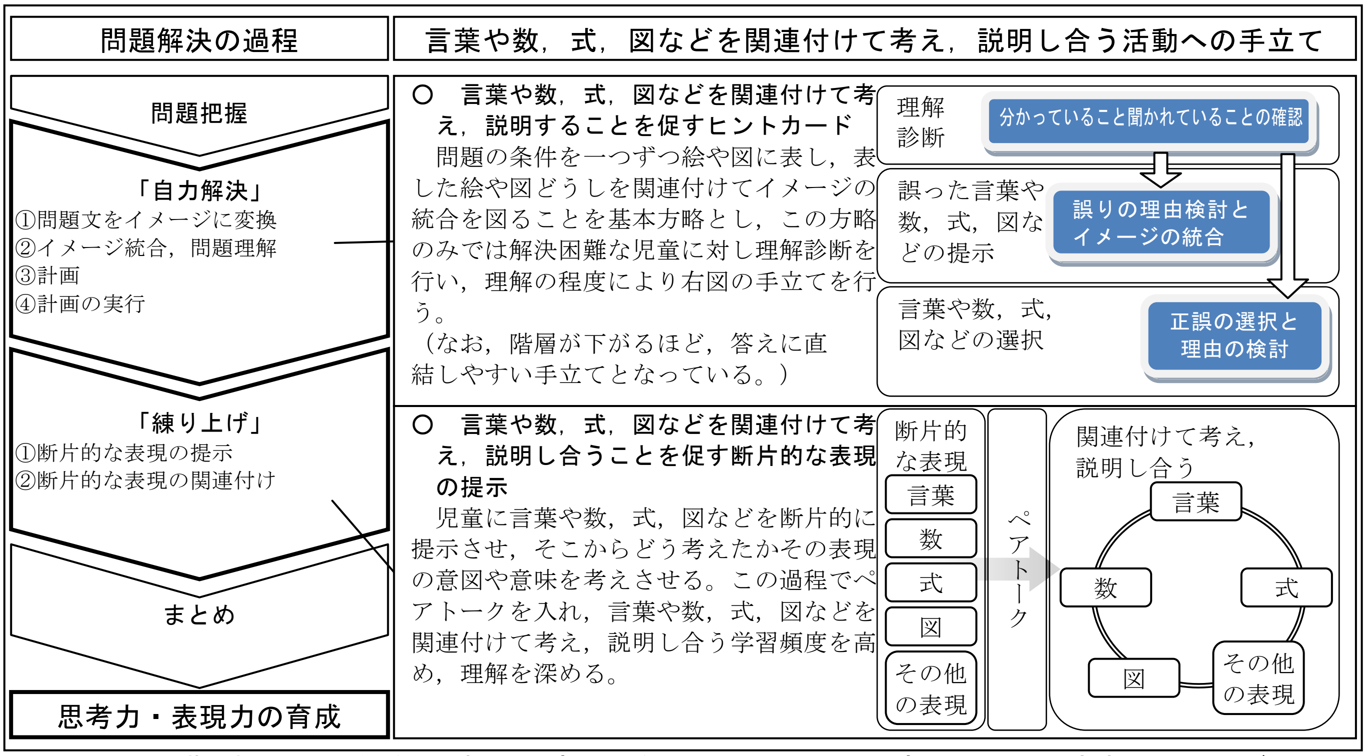


図１　言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合う活動により思考力・表現力を育成する授業モデル

Ⅲ　研究仮説と検証の視点と方法

文献研究を基に次のような研究仮説を立て，その検証の視点と方法を表２に示す。

表２　研究仮説及び検証の視点と方法

研究仮説	「自力解決」や「練り上げ」において言葉や数，式，図などを関連付けながら考えさせ，説明し合わせることで，筋道を立てて課題の解決を図ることができ，児童に数学的な思考力・表現力を育てることができるであろう。	
検証の視点		仮説検証の方法
(1) 言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合うことができたか。		行動観察，ノート，検証問題
(2) 筋道を立てて問題を解決することができたか。		行動観察，ノート，検証問題

Ⅳ　研究授業について

１　研究授業の内容

(1) 研究授業の計画

○　期　間　平成25年12月９日～平成25年12月13日
○　対　象　所属校第３学年（１学級22人）
○　単元名　計算の工夫（べつべつにいっしょに）
○　目　標

図を使って組になる数量に着目し，まとまりを考えるとともに，「別々に」と「合体」の二つの考えを一つの式に表すことを考え，分配法則が成り立つことに気付く。

○　単元の指導計画（全５時間）

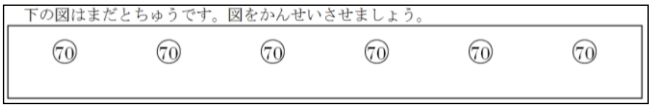
時	学習内容
1	・加法と乗法を組み合わせた問題を「別々に」考えて解く方法と「合体」で考えて解く方法の二通りの考え方で課題を解決する。
2	・「合体」で考えて解く方法のよさを理解する。
3	・減法と乗法を組み合わせた問題を「合体」で考えて解く方法で解決する。
4	・「別々に」考えたり，「合体」で考えたりして，二通りの方法で問題を解き，二つの式の答えが同じになることを確かめ，分配法則の理解を深める。
5	・検証問題Ⅰ，検証問題Ⅱに取り組む。

(2) 言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合わせるための学習指導の工夫

ア　「自力解決」でのヒントカードの工夫

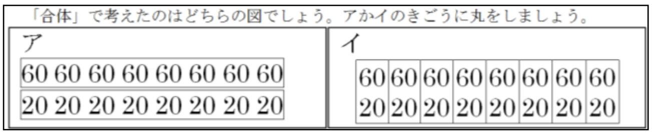
自力での解決が難しいと判断した児童に図２に示すヒントカードを提示した。上から順に第１時，第２時, 第３時の問題と使用したヒントカードである。

1　たくみさんは，お楽しみ会をするので，１本70円のジュースを６本，１こ30円のみかんを６こ買いました。何円はらえばよいですか。



〈第１時の問題と使用したヒントカード〉

2　文ぼう具店で，60円のえん筆を８本，20円のキャップを８こ買いました。何円はらえばよいですか。



〈第２時の問題と使用したヒントカード〉

3　ゆうきさんは，友だちと５人で，動物園へ行きます。１人分の交通ひは，バスで行くと100円，電車で行くと80円です。動物園までの５人分の交通ひのちがいは何円ですか。

下の式は，たろうくんがかいたものです。しかし，どこかまちがっています。まちがっているところをなおして，正しい式を考えましょう。

式	図
100＋80＝180 180×５＝900	

〈第３時の問題と使用したヒントカード〉

図２　第１時から第３時までの問題と使用したヒントカード

第１時では,「別々に」で考えて解く方法と「合体」で考えて解く方法の二通りの考え方を見付けることが目標であり，初めての学習であることから不十分な図を提示し完成させるヒントカードを使用した。第２時では，既習の「合体」で考えて解くよさを理解するため，正しい図を選択させるヒントカードを使用した。第３時では，減法の場合の「合体」の考えのよさを理解するため，誤りを提示し，それを直させるヒントカードを提示した。

イ　「練り上げ」での断片的な表現の提示の工夫

「練り上げ」では，次の表３に示す形式の表現を断片的に提示させ，その意図や意味を考えさせた。

表３　各授業の「練り上げ」で断片的に提示した表現の形式と表現内容とねらい

時	形式	表現内容とねらい
1	式	「70×」と「70＋」までを提示し，それぞれの式の続きを考えさせ二通りの考え方を理解させる。
2	図	「別々に」と「合体」の図を両方提示し，「合体」のよさを考えさせる。
3	言葉	「（問題文の中に）『違いは』とあるから足し算か引き算か分からない」という発言を基に，減法の場合の「合体」での考え方を理解させる。

２　研究授業の分析と考察

(1) 言葉や数，式，図などを関連付けて考え，説明し合うことができたか

ア　他県の学力調査結果との比較

授業実施後，言葉や数，式，図などを関連付けて説明することができたかどうかについて，第３学年で実施されたＡ県の調査問題（以下，検証問題Ⅰとする。）を用いて検証した。問題を図３に示し，解答類型と所属校とＡ県の結果を表４にまとめ，検証問題Ⅰの模範的な解答例を図４に示した。

下の図のように，おかしがならべてあります。
あきらさんは，下の式でぜん部のおかしのこ数をもとめました。

式　５×７＝35　　４×５＝20　　35＋20＝55

かいとう用紙の図に線を入れて，あきらさんのもとめ方をせつ明しなさい。

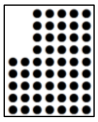


図３　検証問題Ⅰ

表４　検証問題Ⅰの解答類型と所属校及びＡ県の結果

段階	解答類型	所属校児童数（割合）	Ａ県児童数（割合）
Ⅳ	・図の下から五つ目と六つ目の間に線を引き，図と式を対応させて説明している。	９人 (40.9%)	389 人 (34.4%)
Ⅲ	・図の下から五つ目と六つ目の間に線を引き,説明している。	５人 (22.7%)	157 人 (13.9%)
Ⅱ	・上記以外の解答	８人 (36.4%)	378 人 (33.4%)
Ⅰ	・無解答	０人 （０%）	208 人 (18.4%)

線を入れて上と下に分けると，
下のこ数は５×７＝35です。上のこ数は４×５＝20です。合わせて35＋20＝55です。

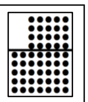


図４　検証問題Ⅰの模範的な解答例

所属校とＡ県の比較の結果，段階Ⅲと段階Ⅳの児童を言葉や数，式，図などを関連付けて説明するこ

とができた児童と捉えると，所属校の児童は，Ａ県の正答率を15.4ポイント上回り，無解答の児童が０人であった。

イ　「自力解決」でのヒントカードの効果

ヒントカードは図２に示したものを使用した。それぞれの授業で「自力解決」できていなかった児童数と，その後のヒントカードにより「自力解決」した児童数を次の表５に示す。

表５　ヒントカードの形式と提示で「自力解決」した児童数

時	形式	授業人数	「自力解決」ができていなかった児童数	ヒントカードにより「自力解決」した児童数
1	不十分を正す	22人	７人	３人
2	選択する	22人	４人	１人
3	誤りを正す	22人	８人	５人

以上の結果より，「自力解決」ができていない児童に対して，ヒントカードを与えて，考えさせることで，約半数の児童が正しく「自力解決」できた。第２時に使用した選択形式のヒントカードで「自力解決」できた児童数が少ない。しかし，ヒントカードを渡した４人全員が，正しい図を選択していたことから，イメージの変換に成功していると言える。更に立式への手立てが必要なことが分かった。

ウ　授業における児童の行動観察

次にＡ児の第２時における記述内容をもとに検証する。第２時は，図２に示した問題に取り組ませた。

この問題は，60と20をまとめて８倍する「合体」という方法について，図と式で説明する問題である。

Ａ児は，検証問題Ⅰで段階Ⅳだった児童である。Ａ児は，第２時の問題に対して，図を自力でかくことができなかったため，図２に示したヒントカードを提示した。

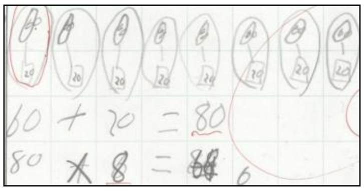


図５　練り上げ前のＡ児の記述

その結果，Ａ児は，図５のようにノートに記述した。Ａ児はヒントカードを基に，「合体」の方法で考える図を選択し，図をかき，60と20をまとめて計算すればよいことに気付いている。問題場面のイメージの統合を促し，ノートに自分の考えを整理する上でヒントカードは有効だったと思われる。しかし，Ａ児は，誤って80＋８としており，80の束が八つ分ということと80×８という計算が関連付けて理解できていなかった。しかし「練り上げ」で，80×８と修正した。「練り上げ」で取り上げた児童の考えを図６に示し，その際の発言を表６に示す。図６の左から順に「別々に」「合体」の考えを表現した図である。

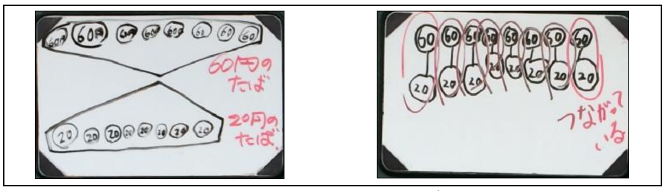


図６　第２時に取り上げた図

表６　「練り上げ」での発言者と発言内容

発言者	発言内容
教師	友達が図をかいてくれました。二つの図のどちらが「別々に」で，どちらが「合体」作戦でしょうか。お隣と相談してみましょう。
Ｃ児	左が「別々に」作戦で，右が「合体」作戦だと思います。わけは，左は60円と20円に分けていて，右は，60円と20円で合体しているからです。
教師	Ｃ児が図のどこを見て言っているか分かりましたか。図を指しながら説明してください。
Ｄ児	私もＣ児と一緒で，左が「別々に」作戦で，右が「合体」作戦だと思います。わけは，左は，60円の仲間と20円の仲間に分けていて，右は，60円と20円を一緒に合体しているからです。
Ｅ児	「別々に」作戦は，60円の束と，下には20円の束があって，分けられています。右は，60円と20円がつながっているから，「合体」です。
教師	では，これらの図の式が書けますか。
Ｆ児	左側の図は，60円の束が８こあるので，60×８です。次に20円のキャップが８こあるので，20×８です。最後に合わせて 480＋160 です。答えは 640 円です。
Ｈ児	右側の図は，60＋・・・
教師	ストップ。Ｈ児が図のどこを見て「60＋」と書いたか分かりますか。図を指してください。
Ａ児	こことここです。(図の 60 と 20 を指で指し示した。)
教師	なるほど，では続きを書いてください。
Ｈ児	60＋20 は80ですね。答えは，640 円です。
Ｉ児	この80は，60と20を足した80です。この８は，80の束が，１，２，３…８個あるということです。

表６の下線は児童が，式や数字を図と関連付けて説明し合っている部分である。この「練り上げ」後のＡ児の表現の変容を図７に示す。

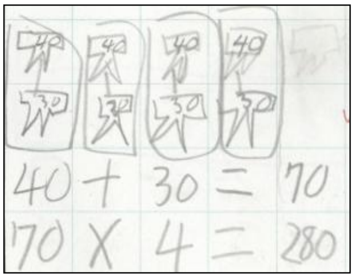


図７　練り上げ後のＡ児の記述

図５と比較して，図と式を関連付けて考えることができ，40と30を「合体」した70の束が四つ分と考えていることが分かる。

さらに，図８は，第３時の減法の学習におけるＡ児の記述である。Ａ児は，対応する７と４を丸で囲み，計算の結果である３を矢印の下に書き，正しく計算している。図の表現も，簡素で立式しやすいものへと変化している。

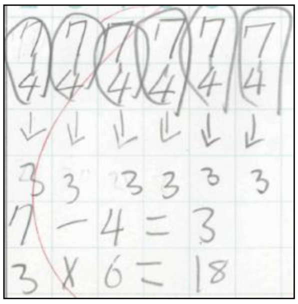


図８　第３時のＡ児の記述

このように学習の理解を深められるよう言葉や数，式，図などを関連付けて説明し合うことができた。

(2) 筋道を立てて問題を解決することができたか

ア　広島県「基礎・基本」定着状況調査との比較

筋道を立てて問題を解決することができたかについて, 図９に示した平成24年度広島県「基礎・基本」定着状況調査（以下，広島県調査とする。）を参考に作成した問題（以下，検証問題Ⅱとする。）を用いて検証する。検証問題Ⅱの実際を図10に示す。

> １こ25円のチョコレートを12こ買います。さちこさんは，代金が何円になるかを筆算で求めようとしています。それを聞いて，たかしさんは，筆算をしないで25×12をかんたんに求めるくふうを思いつき，右のような計算をしました。
>
> 次に，さちこさんは，チョコレート32この代金を求めようとして，25×32も，たかしさんと同じようにくふうして計算することができると考えました。さちこさんは，くふうしてどんな計算をしたのでしょうか。□の中に式の続きを書きましょう。
>
> 25×12
＝25×（４×３）
＝（25×４）×３
＝100×３
＝300
>
> 25×32
＝

図９　広島県調査

> １こ30円のチョコレートを12こ買います。さちこさんは，代金が何円になるかを筆算で求めようとしています。それを聞いて，たかしさんは，筆算をしないで30×12をかん単に求める工夫を思いつき，下の図をかき，せつ明しました。
>
> さちこさんは，チョコレート23この代金を求めようとして，30×23も，たかしさんと同じように工夫して計算することができると考えました。そこで，たかしさんの考えを使って，計算の方ほうを妹にせつ明しました。妹にどのようにせつ明したのでしょう。□の中にせつ明の続きを書きましょう。
>
> （たかしさんのかいた図）
㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚
↓
㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚㉚　㉚㉚
>
> （たかしさんのせつ明）
30×12は，30×10と30×２に分けるとかんたんです。
30×12は，30×（10＋２）です。30×（10＋２）は，（30×10）＋（30×２）だから，300＋60になります。
答えは 360 円です。
>
> かい答らん　30×23は，

図10　検証問題Ⅱ

検証問題Ⅱは，30×23を30×（20＋３）に式を変形し，更に（30×20）＋（30×３）に式を直して計算方法を説明する問題である。

本単元において，児童は，かけられる数を分解する考えについては学習しているが，かける数を分解する考えについては学習していない。この新たな課題に対して，児童が既習内容から類推的に思考することができたかどうかを検証する。表７は，所属校の検証問題Ⅱの結果をまとめたものである。また，図11は，検証問題Ⅱの模範的な解答例である。

表７　検証問題Ⅱの結果

段階	解答類型	児童数（割合）
Ⅳ	・30×23を30×（20＋３）として考え，式と言葉で説明している。	15人（68.2%）
Ⅲ	・30×23を30×（20＋３）として考えた式を書いている。	２人（ 9.1%）
Ⅱ	・上記以外の解答	３人（13.6%）
Ⅰ	・無解答	２人（ 9.1%）

> 30×23は，30×20と30×３に分けるとかんたんです。
30×23は，30×（20＋３）です。30×（20＋３）は，（30×20）＋（30×３）だから，600＋90になります。答えは 690 円です。

図11　検証問題Ⅱの模範的な解答例

検証問題Ⅱの結果，かける数を分解し，分配法則を用いて計算を行い, 言葉で説明している児童は68.2%だった。今までの学習内容を基に類推的に考え，かける数を分解して式で表現している段階Ⅲと段階Ⅳの児童を合わせると77.3%であった。広島県調査の正答率は，71.2%であり，6.1ポイント上回っていた。無解答率は，13.4%であり，4.3ポイント下回っていた。同一の問題でないため，単純に正答率で比べることは難しい面もあるが，検証問題Ⅱでは，式で表すことに加えて，記述による説明を求めていることから，所属校の児童は，おおむね筋道を立てて説明することができたと考えられる。

イ　授業における児童の行動観察

最後にＢ児の変容をもとに検証する。Ｂ児は検証問題Ⅱにおいて段階Ⅰだった児童である。

Ｂ児の様子から，問題の「自力解決」が難しいと判断し，ヒントカードを与えた。その結果，問題と対応した図をかくことができた。しかし立式はできず，「（問題文の中に）『違いは』とあるから引き算だと思ったけど，足し算か引き算か分からない。」と述べていた。この後図12に示した児童の図をもとに「練り上げ」を行った。その際の発言を表８に示す。

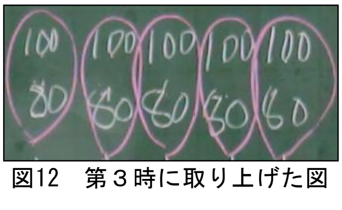


図12　第３時に取り上げた図

表８　「練り上げ」の場面の様子

発言者	発言内容
教師	友達が図をかいてくれました。この図に付け足しをしたいと言っている人がいますね。どんな付け足しをしたいのだと思いますか。
Ｉ児	昨日，矢印も付けていたと思います。
教師	矢印をつけていたね。他にもありますか。
Ｊ児	問題に「違い」とあったから，100と80の間に引き算の記号をかいてつなぎ引き算をしました。
教師	なるほど，引き算をしたんだ。Ｊ児の言っていることが分かりますか。
Ｋ児	100-80＝20 をしたんだと思います。
教師	今Ｋ児が 100-80＝20 と言ったけど，20 って図で言うとどこですか。ペアで話し合いましょう。
Ｂ児	あ，式が分かった。

Ｂ児は，「あ，式が分かった。」と発言した後，すぐにノートに正しい式を書くことができた。Ｂ児が考えを深め，式表現に至ったのはなぜか。表８の教師の発言で，表現の意図を児童に考えさせている部分に下線を引いた。発表者の表現に付け足すことや，発表者の意味や意図を読み取らせ，他の表現に言い換えることを求めている部分である。この活動を通して，図10に示した図に児童が書き加えを行った図を図11に示す。

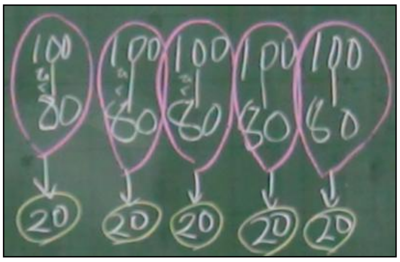


図11　第３時の「練り上げ」後の図

このように一人の児童に断片的に表現を提示させ，その表現の意味や意図を考えさせる活動を取り入れることで，Ｂ児は「練り上げ」の最中に式表現に至ることができたと考えられる。また，Ｂ児は，別の児童のかいた図を基に，どう考えたのか相手の考えを帰納的に推論する思考を働かせたと考えられる。その後の類似問題を解く際もＢ児は正しい式を書き，計算できた。

このように「練り上げ」で，考えを断片的に提示させ，その意味や意図を考えさせることは，多くの児童に効果があるだけでなく，努力を要する児童にも計算の手続き的な理解を促し，筋道立てて問題を解決させる上で有効であることが分かった。

しかし，計算の手続き的な理解はできたものの，Ｂ児は，検証問題Ⅱにおいては類推的に演算式を考えだすことができなかった。手続き的な理解に到達した児童の数学的な思考力・表現力を更に高めるため，「自力解決」や「練り上げ」の際，計算の意味を考えさせる指導の工夫が更に必要である。

Ⅴ　研究のまとめ

１　研究の成果

本研究において，「自力解決」で学習内容に合わせたヒントカードを提示し，「練り上げ」で最初にどんな表現を断片的に提示するか考え，表現の意図や意味を考えさせることで，言葉や数，式，図などを用いて考え，説明し合う活動が活性化し，児童に筋道を立てて思考し表現させることができるということが分かった。他の領域においても，授業モデルを基に児童に考えをもたせ，表現の意図や意味を考えさせるという視点をもって授業を構成すれば，同様の効果が期待できる。

２　今後の課題

○　「自力解決」では，ヒントカードを用いたことでイメージを図に表せるようになった。しかしイメージから立式させるところに課題が残った。問題全体の理解をさせるために，イメージしやすいよう問題文を変更したり，問題文をイメージへ変換させて，図と式を対応させやすくなるようなヒントカードの在り方を研究したりする必要がある。

○　「練り上げ」では，始めに断片的に表現を提示し，その意図や意味を考えさせることで，他の表現と関連付けて考えさせ，説明し合わせることができた。しかし，式の表す意味をより理解させるために，「練り上げ」の最中で，どのように児童の表現を取り上げ，思考を深めていけばよいか研究していく必要がある。

【引用文献】

1)　国立教育政策研究所教育課程研究センター（平成23年）：『評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料』教育出版 p.23
2)　小島宏（2008）：『算数科の思考力・表現力・活用力』文溪堂 p.53
3)　文部科学省（平成20年）：『小学校学習指導要領解説算数編』東洋館出版社 p.8
4)　文部科学省（平成20年）：前掲書 p.8

【参考文献】

片桐重男（2004）:『数学的な考え方の具体化と指導―算数・数学科の真の学力向上を目指して―』明治図書
田中博史（平成13年）：『子どもの思考過程が見えてくる算数的表現力を育てる授業』東洋館出版社
瀬尾美紀子他（2010）：『発達と学習』北大路書房
坂本美紀（1993）：『発達心理学研究４号（２）』日本発達心理学会
David C.Webb（2008）：『Beneath the Tip of the Ice berg』Mathematics teaching in the middle school