

# 事象を数理的に考察し表現する能力を高める関数指導の工夫

## — 問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動を通して —

東広島市立福富中学校 時永 啓史

### 研究の要約

本研究は、問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動を通して、事象を数理的に考察し表現する能力を高める関数指導の工夫について考察したものである。文献から、問題解決の方法を的確に説明するためには、「用いるもの」とその「用い方」について考え、その両方を記述し、数学的な表現を用いて説明することが大切であること、また、数学的に説明し伝え合う活動は数学を利用する学習を支える活動であることや、説明し伝え合う活動における他者とのかかわりが大切であることが分かった。そこで、第2学年「一次関数」の学習において、日常生活における事象を扱った問題を解決する際に、「用いるもの」とその「用い方」を重視したワークシートを使って数学的に説明し伝え合う活動を充実させた。検証の結果、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることに有効であることが明らかとなった。

**キーワード：方法の説明 用いるもの 用い方**

## I 主題設定の理由

中学校学習指導要領（平成20年）の数学科の目標には、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることが示されており、今回の改訂では「表現する能力」が新たに加えられた。中学校学習指導要領解説数学編（平成20年、以下「解説数学編」とする。）では、関数の指導において、「事象の中にある数量の関係を既習の関数と仮定して処理し、導かれた結果を事象に照らして判断し説明することが重要である。」<sup>1)</sup>と記されている。また、中学校数学科の内容の骨格の一つに「説明し伝え合うこと」が挙げられており、数学的に説明し伝え合う活動の重要性が述べられている。

全国学力・学習状況調査中学校数学の主として「活用」に関する問題の記述式には、事実・事柄の説明、方法の説明、理由の説明の3通りがある。全てに課題があり、特に、方法の説明は正答率が低く、解答は出せるが、その過程や方法について説明することが不十分である。方法の説明についての先行研究も見当たらず、指導の工夫が求められる。

そこで、第2学年「一次関数」の学習において、説明し伝え合う活動の授業展開を工夫する。単に「説明しなさい」と問う形のワークシートではなく、問題解決の方法として何をどのように使うのかということ記述する欄を設定し、文章化させることを意図してワークシートを作成する。このワークシート

を基に、問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動を通して、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることができると考え、本主題を設定した。

## II 研究の基本的な考え方

### 1 事象を数理的に考察し表現する能力について

#### (1) 事象を数理的に考察し表現する能力とは

「解説数学編」において、「事象を数理的に考察することは、主に二つの場面で行われる。一つは、日常生活や社会における事象を数学的に定式化し、数学の手法によって処理し、その結果を現実にも照らして解釈する場合である。またもう一つは、数学の世界における事象を簡潔な処理しやすい形に表現し適切な方法を選んで能率的に処理したり、その結果を発展的に考えたりすることである。」<sup>2)</sup>とある。本研究では、一つ目の、日常生活における事象について数理的に考察する。

また、「表現することは、事象を数理的に考察する過程で、推測したり見いだしたりした数や図形の性質などを的確に表したり、その妥当性などについて根拠を明らかにして筋道立てて説明したり、既習の数学を活用する手順を順序よく的確に説明したりする場面で必要になる。表現することにより、一層合理的、論理的に考えを進めることができるようになる

ったり、より簡潔で、的確な表現に質的に高めることになったり、新たな事柄に気付いたりすることも可能になる。」<sup>3)</sup>と記してある。

よって、事象を数理的に考察し表現する能力とは、日常生活における事象を数学的に定式化し、数学の手法によって処理し、その結果を現実にも照らして解釈する場面で、既習の数学を活用する手順を順序よく的確に説明する力であると定義する。

**(2) 事象を数理的に考察し表現する能力を高めるために**

「解説数学編」では数学科改訂の要点として、「事象を数理的に考察する過程やその成果についての認識は、表現することによって深められる。新たに『表現する能力を高めること』を示すことで、数や図形の性質などを的確に表したり、根拠を明らかにして筋道立てて説明したり、自分の思いや考えを伝え合い、それらを共有したり質的に高めたりすることが重要であることを明確にした。」<sup>4)</sup>とある。

また、数学的活動の過程において、自分自身の言葉で着想や思考を表すことにより、自分の考えを再認識できることや、説明し伝え合う活動における他者とのかかわりの大切さが記されている。

したがって、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるために、授業実践において以下のことに留意する。まず、数学の手法によってどのように処理したのかを、他者に説明することができるようにする。さらに、伝え合うことにより、お互いの考えをよりよいものにしたり、一人では気付くことのできなかった新たなことを見いだしたりする機会が生まれることを実体験できるようにする。

**2 問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動**

**(1) 全国学力・学習状況調査における事象を数理的に考察する問題について**

全国学力・学習状況調査中学校数学の主として「活用」に関する問題（以下、「B問題」とする。）の記述式の問題には、

①予想した事柄を数学的な表現を用いて説明すること（事実・事柄の説明）

②問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明する

こと（方法の説明）

③事柄が成り立つ理由を説明すること（理由の説明）の3通りがある。調査開始から平成25年度までの平均正答率は順に 40.0%、30.6%、38.8%で、全てに課題があり、特に、方法の説明は正答率が低い。平成25年度同調査の問題解決の方法を数学的に説明する問題の正答率は 32.6%、広島県（公立）の正答率も 35.6%と、課題があるとされている。

平成25年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学（平成25年、以下、「解説資料」とする。）における中学校数学科の調査問題作成に当たって、「事象について数学的に解釈する場面でのアプローチの仕方や手順の説明を求める問題によって、構想を立てたり、それを評価・改善したりする力をみることにした。」<sup>5)</sup>と記されている。この調査で示されている問題は、本研究における事象を数理的に考察する力を測る問題と捉えることができる。

**(2) 問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明することについて**

ここからは、問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明することに焦点を当て、述べる。まず、「解説資料」における中学校数学科の調査問題作成に当たっての方法の説明の詳細は、表1のとおりである。

表1 調査問題作成に当たって（方法の説明）<sup>6)</sup>

事柄を調べる方法や手順を説明する場合、問題にアプローチする方法を考える上で、「用いるもの（○○）」（例えば、グラフ、表、式など）と、「用い方（△△）」（例えば、 $x$ と $y$ の関係式にある値を代入して求めることや、2点を結ぶ直線からグラフ上の $x$ の値に対応する $y$ の値を求めるなど）の両方を指摘することが大切である。そこで、「○○を用いて、△△をする。」の形で記述することを解答として求めた。

このように、「用いるもの」とその「用い方」の両方に数学的な表現を用いて記述できた説明を、的確に説明できた解答とみなしている。

全国学力・学習状況調査「B問題」における方法の説明について、正答率と領域を、表2に示す。

表2 全国学力・学習状況調査「B問題」における方法の説明（平均正答率 30.6%）

年度	平成25年度	平成24年度	平成23年度	平成22年度	平成21年度	平成20年度		平成19年度
正答率	32.6%	25.3%	未実施	31.3%	19.9%	51.9%	13.3%	40.2%
領域	関数	図形	関数	関数	関数	関数	関数	関数

方法の説明に関しては、毎年出題されており、主に、関数領域での出題が多い。

平成25年度全国学力・学習状況調査報告書(平成25年、以下「報告書」とする。)における「指導改善のポイント」の「関数」では、「事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明する活動の充実」が挙げられ、「様々な問題を解決する際に、問題解決の方法に焦点を当て、『用いるもの』とその『用い方』について考え、説明する活動を充実することが大切である。」<sup>7)</sup>と記されている。「報告書」における解答類型と反応率により、全国の調査結果を表3に示す。

表3 平成25年度における全国の調査結果

解答類型を基にした反応の分類		全国の反応率	
正答	「用いるもの」と「用い方」を記述し、数学的な表現で的確に説明しているもの	17.3%	32.6%
	「用いるもの」と「用い方」を記述しているが、数学的な表現が不十分であるもの	15.3%	
誤答	グラフ、式、表や数値についての記述はあるが、「用いるもの」や「用い方」について記述していないもの	29.0%	34.1%
	上記以外	5.1%	
	無解答	33.3%	

平成25年度の調査結果で、これまでの学習から、グラフや式、表を用いれば解決に向かうことは判断できても、数学的な表現で説明することができない生徒が3割もいる。

また、「用いるもの」と「用い方」を記述し、数学的な表現で的確に説明した生徒は、全国で17.3%と2割に満たない。私自身、特に、「用いるもの」と「用い方」についての数学的な表現の指導がなされていないことに気付き、指導の工夫が必要であると痛感した。「用いるもの」と「用い方」を記述し、数学的な表現で的確に説明した反応以外の82.7%の底上げが課題である。

### (3) 問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動の工夫について

「解説数学編」の中で、数学的に説明し伝え合う活動は数学を利用する活動を支える活動であることや、説明し伝え合う活動における他者とのかわりが必要であることが示されている。

また、「報告書」には、方法の説明における学習指導に当たって、表4のように記されている。

表4 学習指導に当たって（方法の説明）<sup>8)</sup>

○問題解決のために数学を活用する方法を考え、説明できるようにする

様々な問題を解決する際に、問題解決の方法に焦点を当て、「用いるもの」とその「用い方」について考え、説明することができるよう指導することが大切である。例えば、実際に行った解決の過程を振り返り、その際に用いた方法について、「用いるもの」や「用い方」のいずれか一方の説明にとどまらず、「用いるもの」とその「用い方」の両方を指摘し、的確に説明できるように指導することが考えられる。

このことから、ワークシートには「用いるもの」とその「用い方」の両方を記述する欄を設定する必要があると考える。

片桐重男(2004)は、Fehrの問題解決の過程が算数・数学の問題解決の過程に最も適切と考え、問題把握・形成、見通しを立てる、解決の実行、発表・練り上げ、まとめ・発展の五つの段階に分けている。問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動を、この五つの問題解決の過程で整理すると次のようになる。

まず、問題把握・形成である。ここでは、問題の場面を理解し、与えられているものは何か、求めるものは何かを明確にする。次に、得られた情報を基にして、解決の見通しを立てることになる。このとき、既習事項を基に解決のための見通しをもち、解決に必要な「用いるもの」とその「用い方」に着目する。続いて、解決の実行では、「用いるもの」とその「用い方」を明示し、問題に対する自分の考えを表現する。さらに、発表・練り上げでは、グループで考えを説明し伝え合い、自分の考えと他の考えを比べる。このとき、「用いるもの」とその「用い方」を検討し、よりよい考えを導く。最後に、まとめ・発展では、学級全体で考えを説明し伝え合い、自分たちの考えと他の考えを比べる。このとき、「用いるもの」とその「用い方」を改善し、まとめる。そして、本時の学習を自分の言葉で振り返り、方法の説明の定着を図る。

授業においては、「用いるもの」とその「用い方」について考え、説明する活動を充実することが大切である。そこで、ワークシートに、ただ単に「説明しなさい」と問うものではなく、図1のように、「用いるもの」とその「用い方」を整理し、それを基に説明していくという形の記入欄を設定する。そして、

図2のように、個人で考えたもの、グループで考えたもの、学級全体で考えたものが残るようにし、振り返りに生かしていく。

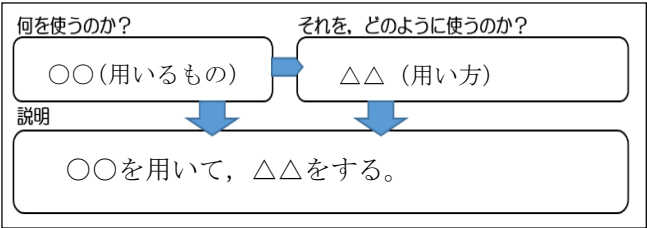


図1 ワークシート記入欄

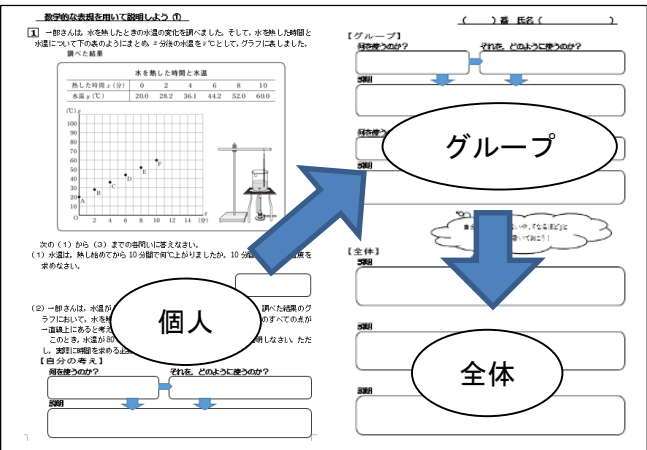


図2 ワークシートの流れ

指導に当たっては、個人活動でどこまで記述できているかを確認し、図3のようなヒントカードを使って個別に必要な手立てを行う。ヒントカードが必要な生徒に渡し、更に書くことが難しい生徒には助言をしながら考えさせる。グループ活動においては、自分とは違う考え方やよりよい表現を取り入れることができるように指示や支援を行う。ここでは、ヒントカードを使って自分なりの説明を行うことや、違う方法や表現を探すことを促す。また、説明が書けていない生徒について、他者の説明を理解できたか確認し記述させる。最後に学級全体の活動では、「用いるもの」と「用い方」を記述し、数学的な表現で確かに説明しているものを共有し、振り返りを行う。数学的な表現の簡潔さと分かりやすさを生徒の声から導き出したい。

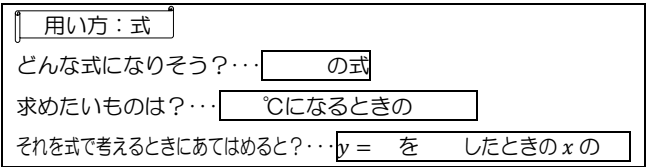


図3 ヒントカードの例

問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動の授業展開を図4に示す。

問題解決の過程	導入：既習事項の確認
問題把握・形成	問題の場面を理解し、与えられているものは何か、求めるものは何かを明確にする。
見通しを立てる	既習事項を基に解決のための見通しをもち、「用いるもの」とその「用い方」に着目する。
解決の実行	「用いるもの」とその「用い方」を明示し、問題に対する自分の考えを表現する。
発表・練り上げ	グループで考えを説明し伝え合い、自分の考えと他の考えを比べる。 「用いるもの」とその「用い方」を検討し、よりよい考えを導く。
まとめ・発展	学級全体で考えを説明し伝え合い、自分たちの考えと他の考えを比べる。 「用いるもの」とその「用い方」を改善し、まとめる。 本時の学習を自分の言葉で振り返り、方法の説明の定着を図る。

図4 問題解決の方法を数学的に説明し伝え合う活動の授業展開

### Ⅲ 研究の仮説と検証の視点と方法

#### 1 研究の仮説

日常生活における事象を扱った問題を解決する際

に、「用いるもの」とその「用い方」を重視したワークシートを使って数学的に説明し伝え合う活動を充実させれば、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることができるであろう。

## 2 検証の視点と方法

検証の視点と方法を表5に示す。

表5 検証の視点と方法

検証の視点	検証の方法
「用いるもの」とその「用い方」について考え、その両方を記述し、数学的な表現で的確に説明することができたか。	行動観察 ワークシート 事前テスト 事後テスト
伝え合う活動により、互いの考えを検討し、よりよい考えを導くことができたか。	行動観察 ワークシート

## IV 研究授業について

### 1 研究授業の内容

- 期 間 平成25年12月4日～平成25年12月6日
- 対 象 所属校第2学年（1学級28人）
- 単元名 一次関数
- 目 標

事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することができる。

- 学習指導計画（全3時間）

時	学習内容
1	水温が80℃になるまでにかかる時間を求める方法を説明する。
2	蛍光灯と白熱電球の総費用が等しくなるおおよその時間を求める方法を説明する。
3	キャップのおよその個数を求める方法を説明する。

### 2 研究授業の分析と考察

#### (1) 「用いるもの」とその「用い方」について考え、その両方を記述し、数学的な表現で的確に説明することができたか

まず、方法の説明の解答類型を簡略表記する。正答のうち、「用いるもの」と「用い方」を記述し、数学的な表現で的確に説明しているものをA解答、「用いるもの」と「用い方」を記述しているが、数学的な表現が不十分であるものをB解答と表す。同様に、誤答のうち、グラフ、式、表や数値についての記述はあるが、「用いるもの」や「用い方」について記述していないものをC解答と表す。

研究授業前の事前テストでは、平成25年度の全国学力・学習状況調査の問題を使用した。事前テストにおける方法の説明の問題を図5に、結果を図6に示す。

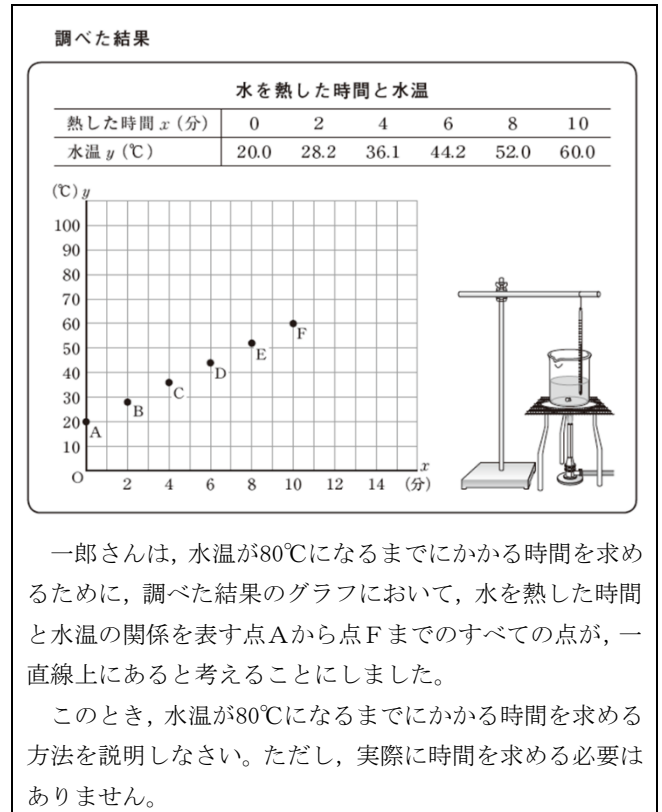


図5 事前テスト

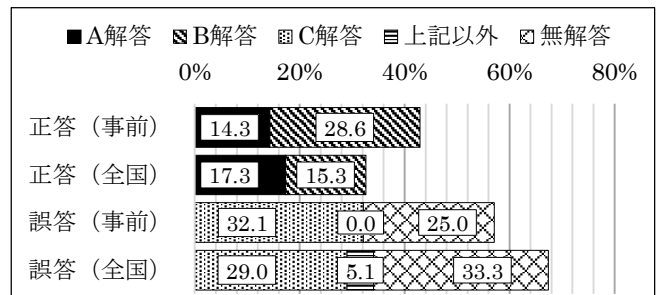


図6 事前テストの結果

正答率は全国調査の結果を上回っているものの、数学的な表現で的確に説明できた生徒の割合は少ない。また、無解答の生徒も多く、記述することへの抵抗が大きい生徒についても確認できた。

研究授業では、個人活動において、誤答に位置付けている生徒へのヒントカードの提示と助言を行った。そして、グループ活動において、A解答の生徒にはグループ内で説明させ、B解答とC解答の生徒には、より数学的な表現を求めるように助言した。全体の場面では、式やグラフを用いた説明文を発表させ、どこに数学的な表現を使っているか、それにより簡潔で分かりやすくなっているかを確認させた。

次に、事後テストにおける方法の説明の解答を分析していく。事後テストでは、方法の説明に関する記述問題を2問出題した。まず、事前テストと同様

の題材を扱い、問い方が違う平成19年度調査問題(グラフをのぼす方法を除いて答えさせる問題)を使った事後テスト1を図7に、結果を図8に示す。

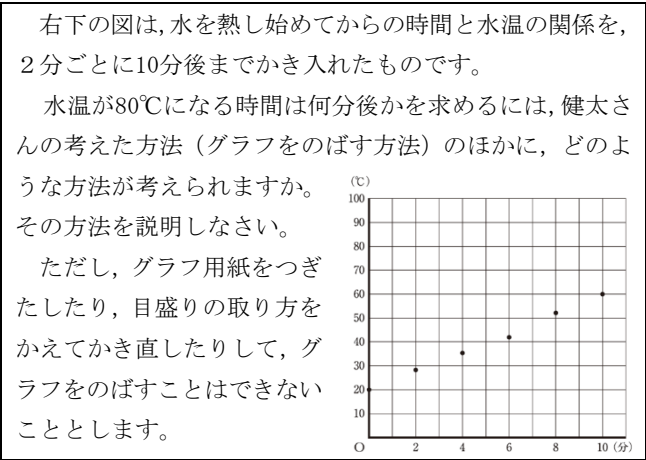


図7 事後テスト1

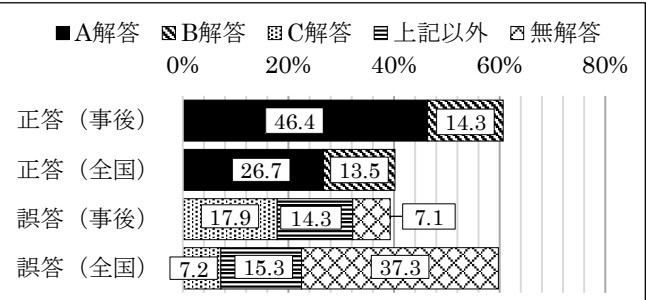
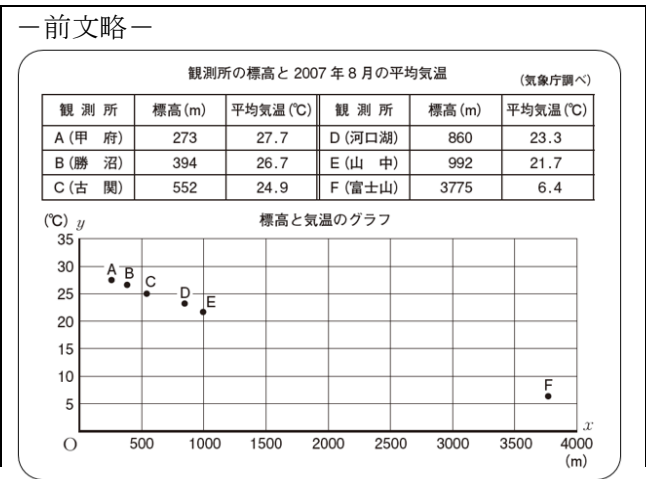


図8 事後テスト1の結果

「一次関数の式」や「変化の割合」、「代入」など、数学的な表現を用いて簡潔に説明することのできた生徒の割合が増え、事前テストに比べ記述への抵抗が少なくなったことが見取れた。

さらに、平成20年度調査問題における方法の説明問題を使った事後テスト2を図9に、結果を図10に示す。



里奈さんは、「高さが高くなるのにもなって、気温が一定の割合で下がる」ことをもとに、表やグラフのDとFのデータを用いて、富士山の6合目(2500m)のおよその気温を求めることにしました。

このとき、6合目のおよその気温を求める方法を説明しなさい。ただし、実際に気温を求める必要はありません。

図9 事後テスト2

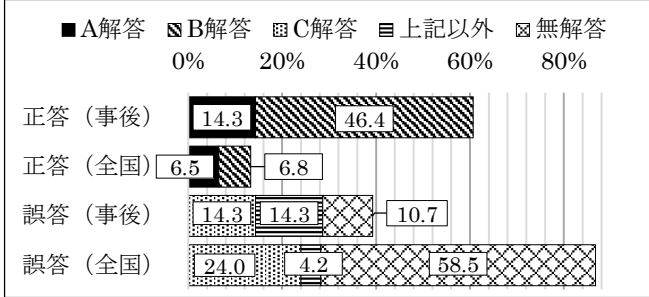


図10 事後テスト2の結果

この問題は、問題文が長く、全国調査でも正答率の低い問題であるが、正答率は全国に比べ成果のあるものとなった。しかし、これまで「用いるもの」として、例えば、「直線のグラフ」と記述すればA解答になったが、この問題では「点Dと点Fを結んだ直線のグラフ」と記述しなければA解答にならない。そのため、A解答の生徒の割合は少なかった。このことについては、問題文をきちんと読む指導を徹底すること、普段の授業から直線は2点で決まるという考えを基に学習させることが必要であると考え。

事前テストにおける方法の説明の問題と、事後テストにおける方法の説明の問題について、t検定を行ったところ、有意水準1%で、事前と比べて事後は平均値に有意な差があるといえることが分かった。

次に、生徒Pがワークシートに書いた方法の説明の記述を図11に示す。

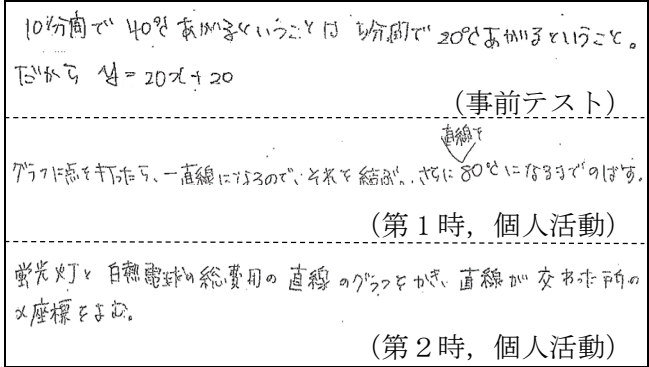


図11 生徒Pの記述

生徒Pが書いた事前テストでの説明は誤答であった。第1時の個人活動で、用いるもの(グラフ)と



用い方（80℃までのばす）に着目することによって正答（B解答）となった。グループや全体での活動から、数学的な表現を使うことによって、説明が簡潔で分かりやすくなることに気付いていた。そして、第2時の個人活動では、数学的な表現を意識して説明を書いていた。グループ活動においては、積極的に発言し、「直線のグラフ」や「座標」などの数学的な表現を使って他者に伝えていた。学級全体の活動では、「交わった所」という表現を「交点」と改善した。

このように、「用いるもの」とその「用い方」に着目し、それらを明示することにより、数学的な表現で説明する力を高めることができたと考える。

## (2) 伝え合う活動により、互いの考えを検討し、よりよい考えを導くことができたか

第1時では、グラフ、式、表から「用いるもの」を選んで考え、水温が80℃になるまでにかかる時間を求める方法を説明する問題を扱った。これは、事前テストの問題と同じ題材である。ワークシートにおける個人活動での記述と、グループ活動での記述を、類型ごとに整理し図12にまとめた。また、授業の振り返りを表6に記す。

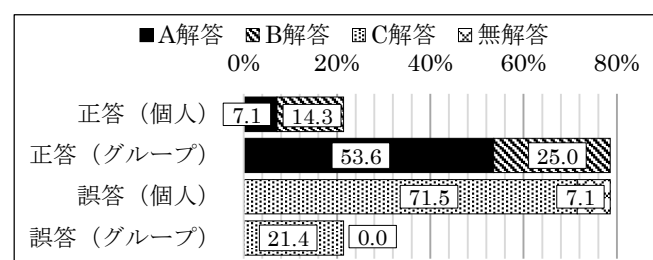


図12 第1時の個人とグループの比較

表6 第1時の振り返り

- ・数学の説明を考えて書くのが難しかった。でも、グループで話し合って書くと少しずつ分かってきた。
- ・グループの中でもいろんな考え方があった。数学で習った言葉を使って分かりやすくまとめるとよいと分かった。

事前テストと同じ問題であるが、「用いるもの」とその「用い方」の記入欄を設定したことによって書きにくくなった生徒が最初多く見られたことは大きな課題である。それにより、事前テストの結果よりも正答率が低い。しかし、グループ活動の時間を多くとり、ヒントカードも使いながら伝え合う中で、半数以上の生徒がA解答の記述に達していた。

第2時では、第1時同様グラフ、式、表から「用いるもの」を選んで考え、蛍光灯と白熱電球の総費用が等しくなるおよその時間を求める方法を説明する問題を扱った。個人活動での記述と、グループ活動で

の記述を、図13にまとめた。また、授業の振り返りを表7に記す。

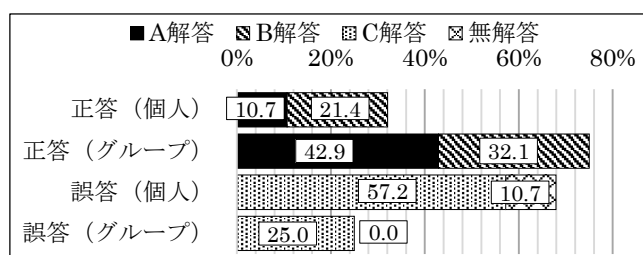


図13 第2時の個人とグループの比較

表7 第2時の振り返り

- ・グループで話し合うと、少し違った書き方もあり、「そう書けば短くなる」ということも分かってきました。でも、もっと短くなるのが黒板を見て分かったから、次のときは一人で考えるときに短く正確に書きたいです。
- ・グループの中でも自分の考えと異なる人もいて、他の方法を知ることでもできたし、人の文章を分かりやすく書きかえることができてよかった。

第1時の学習により、「用いるもの」とその「用い方」についての記述がスムーズになった生徒が増えつつも、やはり個人活動ではヒントカードを見ながら悩む生徒や、説明の文まで到達しない生徒が6割以上いた。しかし、グループ活動では、第1時に比べスムーズに伝え合うことができ、よりよい説明文を取り入れる生徒や、自分の考え以外の説明文を取り入れる生徒が見られた。

第3時では、これまでの2時間とは少し異なり、問題文の中から「用いるもの」を見だし、ペットボトルのキャップのおよその個数を求める方法を説明する問題を扱った。個人活動での記述と、グループ活動での記述を、図14にまとめた。また、授業の振り返りを表8に記す。

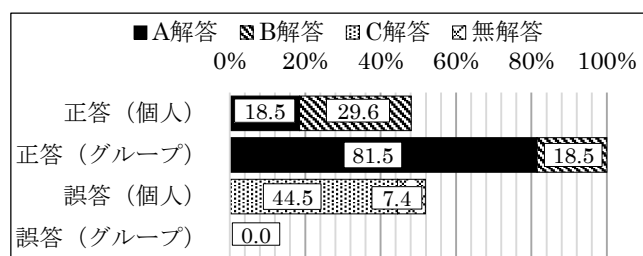


図14 第3時の個人とグループの比較

表8 第3時の振り返り

- ・みんなの意見を聞くことによって、自分では書けなかった表現なども見れてよかったです。
- ・最初この問題を見て自分の考えが出せませんでした。でも、グループでの話し合いのときに説明してもらい分かりました。全体での話し合いでも納得しました。

個人活動におけるC解答の生徒の中でも、44.5%のうち11.1%は、「用い方」記入欄に式の形で求める方法を書いているものの、説明の記入欄が未記入の生徒であった。それら以外のC解答の生徒も、グループ活動では他者の説明に納得し、記述していた。

次に、生徒Q、生徒Rがワークシートに書いた方法の説明の記述を、それぞれ図15、図16に示す。

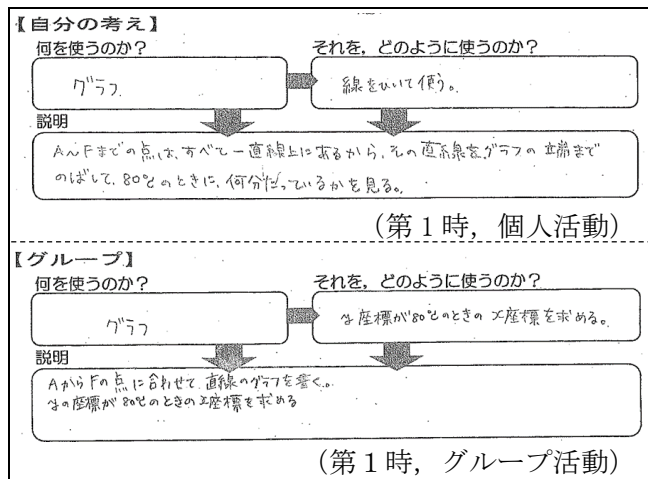


図15 生徒Qの記述

グループ活動において、生徒Qは自分の考えを説明した。その検討の中で「座標」という言葉を他者から気付かされ、「用い方」を改善した。そのことにより、説明の記述がより数学的な表現へと変わった。

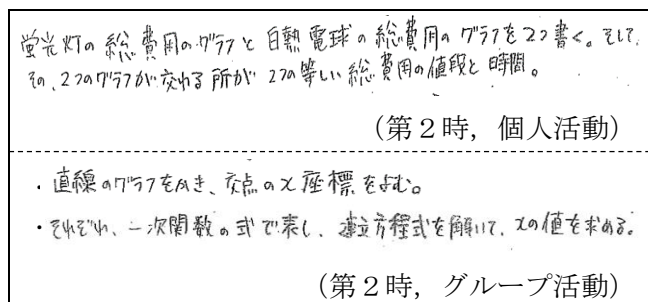


図16 生徒Rの記述

個人活動で、生徒Rはグラフを用いて自分なりに記述していた。グループ活動において、「交点のx座標」という言葉を他者から気付かされて改善するとともに、式を用いての説明を取り入れている。

このように、グループ活動を設定することによって、説明ができていない生徒は他者へ伝えることで自分の記述を再確認し、説明ができていない生徒は他者の説明を理解して取り入れることができた。また、個人で書いた説明をよりよいものにしようとする生徒や、ヒントカードを用いて他者に説明する生徒もあり、効果的であったと考える。その要因として、

簡潔さや分かりやすさを求めたこと、よりよい表現を取り入れるよう促したこと、他の方法についても考えるよう指示したことが挙げられる。

## V 研究のまとめ

### 1 研究の成果

「用いるもの」と「用い方」の記入欄を設けたワークシートを使い、数学的に説明し伝え合う活動を充実させることにより、数学的な表現で的確に説明する力を高めることができ、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることができた。

### 2 今後の課題

「用いるもの」とその「用い方」の記入欄を設けたワークシートを使用することで、それら二つを考えることの必要性を生徒に感じさせたかったが、特に第1時において、「用い方」の欄にどのように記入してよいのか困惑した生徒が多かった。ワークシートの活用方法を更に改善する必要がある。

また、本研究は第2学年関数領域での実践である。他学年の関数領域や、図形など他の領域にも活用できると考えられるが、具体的な問題設定やその実践について研究する必要がある。

### 【引用文献】

- 1) 文部科学省 (平成20年):『中学校学習指導要領解説 数学編』教育出版 p. 46
- 2) 文部科学省 (平成20年): 前掲書 p. 16
- 3) 文部科学省 (平成20年): 前掲書 p. 17
- 4) 文部科学省 (平成20年): 前掲書 p. 7
- 5) 国立教育政策研究所教育課程研究センター (平成25年):『平成25年度全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学』 p. 8
- 6) 国立教育政策研究所教育課程研究センター (平成25年): 前掲書 p. 8
- 7) 文部科学省 国立教育政策研究所 (平成25年):『平成25年度全国学力・学習状況調査報告書 中学校数学』 p. 9
- 8) 文部科学省 国立教育政策研究所 (平成25年): 前掲書 p. 109

### 【参考文献】

- 片桐重男 (2004):『数学的な考え方の具体化と指導ー算数・数学科の真の学力向上を目指してー』  
文部科学省 国立教育政策研究所 教育課程研究センター (平成24年):『全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ 中学校編』