論理的に筋道を立てて推論する力を高める論証指導の工夫
― 証明の方針を立てる活動を通して ―

呉市立横路中学校　林　晃也

研究の要約

本研究は，証明の方針を立てる活動を通して，論理的に筋道を立てて推論する力を高める論証指導の工夫について考察したものである。文献研究から，論理的に筋道を立てて推論する力を高めるためには，形式的に証明を記述させる指導から脱却し，証明の構想に焦点を当てたアプローチとして証明の方針を立てる活動を重視する必要があることが明らかになった。そこで，証明の方針を立てる活動を充実させる工夫として，フローチャートの活用と証明を振り返る活動に着目した。この工夫を取り入れた研究授業を行った結果，生徒は問題の把握に基づき適切に証明の方針を立てられるようになり，根拠を明らかにしながら演繹的に推論することができた。このことから，方針を立てる活動の充実が論理的に筋道を立てて推論する力を高める上で有効であることが明らかになった。

キーワード：論理的に筋道を立てて推論する力　方針を立てる　フローチャート

Ⅰ　主題設定の理由

中学校学習指導要領解説数学編（平成20年，以下「中学校解説」とする。）では，「図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して養われる論理的な見方や考え方は，中学校数学科に限らず，いろいろな分野での学習において重要な役割を果たす」[1]と，図形領域における数学的な推論に基づく論理的な見方や考え方の重要性に触れ，その目標を達成するために，中学校第２学年から証明の学習を取り扱うとしている。

しかし，全国学力・学習状況調査の結果では，証明を記述する問題（平成24年度，記述式）の正答率が46.8%，証明の方針を立てる問題（平成21年度，選択式）の正答率は56.2%と低い。一方，「特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果」（平成17年度，以下「特定」とする。）では，証明の方針が立てられれば証明を書くことができると思っている生徒は71.3%である。つまり，生徒は証明において方針を立てる重要性は概ね感じているものの，証明の方針を立てるための方策を十分に身に付けていない。このことが，証明を記述する問題の正答率の低さに大きく関わっていると考えることができる。

そこで，図形領域の論証指導において，仮定と結論を明確にして証明の方針を立てる活動を単元に意図的・計画的に取り入れる。この活動を通して，証明の意味やしくみを理解し，仮定から結論へ至るプロセスの全体的な把握に基づく証明の構想が立てられるようになり，論理的に筋道を立てて推論する力が高まると考え，本主題を設定した。

Ⅱ　研究の基本的な考え方

１　論理的に筋道を立てて推論する力とは

論理的に筋道を立てて推論する力の本性を捉えるために，「論理的」「筋道を立てて」「推論する」の３点に分けて考えてみたい。小学校学習指導要領解説算数編（平成20年）では，論理的な考えには，幾つかの具体的な例に共通する一般的な事柄を見いだす帰納的な考え，既習の内容との類似性に着目して新しい事柄を見いだす類推的な考え，ある前提を基にして説明していく演繹的な考えがあるとしている。加えて，筋道を立てて考えるとは「根拠を明らかにしながら，一歩ずつ進めていくという考えである。」[2]と記されている。このことから，「論理的」は根拠を明らかにして事柄を説明することを，「筋道を立てて」は根拠を基に順序立てて論を展開することを意図するものであると解釈できる。そして，論理的な考えの思考形式は，帰納，類推，演繹の三つの推論で捉えることができる。中学校においては，帰納や類推によって発見された事柄の正しさや一般性を確かめ，図形の概念や性質を体系的に整理することが求められる。その正しさや一般性を保証する

ものは，演繹的な推論である。そのため，本研究では，「論理的に筋道を立てて推論する力」を「根拠を明らかにしながら，演繹的な推論を用いて結論を導く力」と狭義に捉えることとする。

２　論理的に筋道を立てて推論する力を高めるために

「中学校解説」の「同じ条件を満たすすべての図形についてその事柄が正しいかどうかを調べることはできない。そこで，演繹的に説明する証明が必要である」[3]の文言から分かるように，観察，操作や実験などの活動によって調べてきた図形の性質を，論理的に筋道を立てて推論することで確かめていく学習内容が証明である。また，宮崎樹夫（2004）は「証明の学習とは，なぜそうなるのか根拠を明らかにしながら，自分はもちろん他人をも納得させることができるよう筋道を立てて表現できる能力を育成するためのものである。」[4]と述べている。つまり，証明の学習は論理的に筋道を立てて推論する力を高める中心的な役割を果たすものであり，指導者はそのことを意識し，その指導を行わなければならない。

Ⅲ　論証指導の具体化

１　論証指導のアプローチについて

生徒にとって図形の証明が困難であることは，各種学力調査から明らかになっており，中学校数学科の継続的な課題となっている。例えば，全国学力・学習状況調査の正答率では，書かれた図を代表図として認識する問題58.3%，証明の方針を立てる問題56.2%，証明を記述する問題41.8%，帰納と演繹の違いを考える問題29.7%と満足できる状況ではない。そのため，理論的・実践的なアプローチが多種多様になされている。本研究ではその取組を大きく四つに分類した。

①証明の意義やよさに焦点を当てたアプローチ
②図形の概念や相互関係の理解に焦点を当てたアプローチ
③証明の構想に焦点を当てたアプローチ
④証明の記述に焦点を当てたアプローチ

なお，これら四つのアプローチは排他的な関係ではなく，相互に関わり合い，明確な境界線はない。

論証指導では段階的に証明が書けるようになることを目標とするが，生徒は証明を記述することを大変苦手としている。この課題を克服するため，これまで私は④証明の記述に焦点を当てたアプローチに取り組んできた。それは，証明の記述の型をしっかり学習すれば，類似の命題も同様の方法で証明できるようになると考えていたからである。しかし，一定の成果はあったものの，証明が記述できるようになったとはいい難い。清水静海（1994）が「一般に証明（論証）の指導では，その型式についての指導に留まり,子どもはこれを暗記して覚えることに汲々としているのではないか。」[5]と指摘するように，記述の仕方を指導することだけで，その課題を解消することは難しいと思われる。

辻山洋介（2010）は，生徒が証明の記述に苦しんでいる状況を打開するためには，証明の構想に重点を置いた学習指導が有効であると述べ,その理由を，「証明を構想する取り組みそれ自体に焦点が当てられることにより，証明を構想する際に実際に用いた方法やその用い方を生徒が改善して次の取り組みにいかしたり，改善を意図して教師が指導したりすることが可能になるからである。」[6]としている。つまり，証明を構想する取組を通して，例えば，結論に着目して与えられた図から二つの三角形を見いだすといった，他の証明問題へも適用可能な考え方が身に付くと考えられる。これは，平成21年度全国学力・学習状況調査報告書（以下，「報告書」とする。）で，証明の構想を練る段階を重視し，証明のしくみを捉える指導や方針を立てる指導を強調していることに軌を一にする。こうした立場に鑑み，本研究では③証明の構想に焦点を当てたアプローチで研究を進める。

２　証明の方針を立てることについて

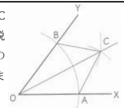
(1) 証明の方針を立てることの重要性について

本研究では，証明の構想を立てる際の見通しにあたる証明の方針に着目した。G．ポリア（昭和29年）は「問題を解くことの大部分はどんな計画をたてたらよいかということを考えつくことにあるといってよい」[7]と述べ，計画を立てることが問題解決の核になることを主張している。これは論証指導にも通じる考えであり，「特定」では「証明が記述できるように，証明の方針を立てることを重視すること」[8]が示され，具体的な方法を工夫しながら今後の指導を考えるべきであるとしている。また,神原一之(2010)は生徒への意識調査から，「証明ができるようになるためには，『見通しを立てること』が重要であると考えている生徒が最も多い。反面，どうすれば『見通しをたてること』ができるのかわからないで困っている生徒も多く，そこに生徒の願いを感じること

ができる。」[9] と，方針を立てる活動の重要性とその指導の充実を述べている。

本研究の実態調査からも方針を立てることの重要性が明らかになった。図１の問題はプレテストで，図２の問題はプレテストの次時の授業において調査したものである。生徒は調査前に，角の二等分線の作図を証明によって確かめる学習をしている。それにもかかわらず，図１のアの正答率は37.5%と大変低かった(合同条件を成り立たせる要素を記述した生徒や記号間違いをした生徒も準正答として含める)。一方，図２の穴埋め問題のイの正答率は66.7%であった。アとイは内容的には同じ解答を期待するものであるが，その正答率には大きなひらきがあった。この結果は，穴埋めや記述証明ができたからといって，証明のしくみを捉えているとは限らないことを示唆している。そして，方針を立てる活動に重点を置き，証明の構想を練る指導を充実させて，証明の意味を理解させる必要性を改めて示している。

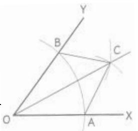
A 君は下の図を見ながら，半直線 OC が∠XOY の二等分線であることを説明してみようと考えています。A 君の考えを読んで，（　ア　）に当てはまる言葉や式を答えてください。



【A 君の考え】
① ２つの三角形があるけど，説明に関係あるのかなぁ
② 角の二等分線であるってことは，∠AOC と∠BOC が等しいってことね。
③ ∠AOC と∠BOC が等しいことを示すためには，どうすればいいかなぁ。あっ，そうだ。（　ア　）がいえれば，∠AOC と∠BOC が等しいって示せる。
④ 作図から，AO と BO の線分の長さが等しいこと，AC と BC の線分の長さが等しいことが分かるから，（　ア　）を示すことができそうだ。

図１　プレテストでの調査

次の□をうめて，半直線 OC が∠XOY の二等分線であることを説明しなさい。



説明

△AOC と△BOC において，
作図から，OA=□…①
AC=□…②
共通な辺だから，OC=OC…③
①，②，③より，
3 組の辺がそれぞれ等しいから，
イ
合同な図形の対応する角は等しいから，
∠AOC=∠BOC
したがって，半直線 OC は∠XOY の二等分線である。

図２　次時の授業での調査

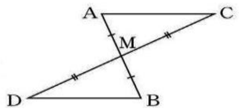
(2) 証明の方針を立てる活動について

片桐重男（1988）は，演繹的な推論を進める際，「分かっていることを基に，『それからどんなことが言えるか』と仮定から結論を考えていく総合的思考と，『そのことが言えるには，何が言えればよいのか』というように結論から仮定を考えていく分析的思考とが使われる。」[10] と述べている。これを図３に示す平成21年度全国学力・学習状況調査Ｂ４の証明の方針の問題に当てはめて考えてみる。

方針◇1◇2は分析的思考，方針◇3は分析的思考に依る総合的思考と考えることができる。つまり，証明の方針を立てるとは，結論（AC//DB）に着目し，分析的思考を活用して結論を導くための要素（∠MAC=∠MBD等）を探り，その見付けた要素が仮定と結論を結び付けるかを検討することであるといえよう。この視点により，証明の方針を立てるとは，次の二つの営みから成り立つものであると捉える。

①問題の把握に基づいて，主に結論に着目して，結論と仮定を結び付ける要素を探ること。
②どの要素が仮定及び結論と結び付くかを検討すること。

右の図のように，線分 AB と線分 CD がそれぞれの中点 M で交わっています。
このとき，AC//DB となることを証明しなさい。



証明の方針１

◇1 AC//DB を証明するためには，∠MAC＝∠MBD(錯角が等しい)を示せばよい
◇2 ∠MAC＝∠MBD を示すためには，△AMC≡△BMD を示せばよい。
◇3 仮定の AM＝BM，CM＝DM を使うと，△AMC≡△BMD が示せそうだ。

図３　証明の方針の問題

３　方針を立てる活動を充実させる工夫について

方針を立てる活動を授業に明確に位置付け，それを充実させる工夫として次の２点に着目した。

(1) フローチャートの活用について

フローチャートとは，図４に示す仮定から結論までの証明の流れを表す「証明のしくみ」の図のことである。湯本武司（2007）は，そのよさを論理の進め方を全体的に捉えることであるとしている。フローチャートは論理の流れが明示されるため，仮定と結論を結び付ける根拠となる要素を捉えやすく，証明の方針を立てる学習指導に効果があると考える。

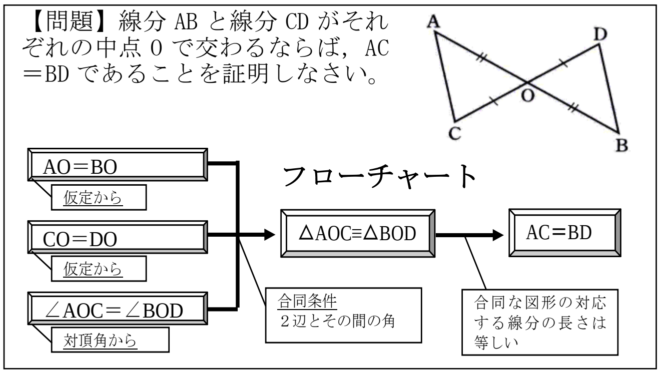


図４　フローチャート

しかし，フローチャートの扱い方には十分な配慮が必要である。証明の構想が立てられない生徒に，穴埋めのフローチャートをただ与えるだけでは，数学が得意な生徒の発表を枠に埋めるだけの作業学習になりかねない。

そのため，本研究ではフローチャートを記述証明を完成させるための穴埋めとして扱うのではなく，

仮定と結論を結ぶ要素を探ったり，検討したり，考えを引き出すための道具として活用する。そして，探求・検討した内容をしっかり表現させる活動を仕組む。そうすることで，他の証明問題に応用できる方針の立て方を身に付けることができると考える。

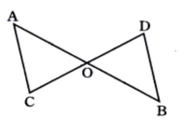
(2) 証明を振り返る活動について

証明は論理的手順に従うことから，その方針の立て方も証明の意味やしくみの理解に基づく筋道立てた考えによって創出される。図形の証明学習では，証明をつくることだけでなく証明を振り返ることも大切とされている。そのねらいの一つは，証明の意味やしくみを知り，論理の進め方の全体的な把握ができるようにすることである。例えば，平成22年度「報告書」の授業アイデア例には，証明を読み直して振り返り,証明のしくみを捉える活動が示されている。つまり，方針を立てることと証明を振り返ることの関連について，廣瀬真琴（2010）の「見通しとは，主体的な学びにおける根拠ある確かな振り返りの中で，自発的に生成される。」[11]の言葉を借りれば，思考の根拠を明らかにしながら証明を振り返ることで，証明の方針を立てる力は自発的に身に付くものであると捉えることができる。このことについて，勝野学（2012）は，よい証明を読んで証明のしくみを捉えさせ，証明の方針を見いだす授業実践を提案している。そのため，本研究では証明を振り返る活動も授業に随時取り入れ，方針を立てる活動が充実するようにする。

以上のことから，論証指導における本研究の工夫は次の３点にまとめられる。

K1：生徒が方針を立てる活動を毎時間の授業に明確に位置付け，その時間を確保する。 K2：仮定と結論を結ぶ要素を探求・検討させるためにフローチャートを活用し，その中で考えたことをしっかり表現させる活動を仕組む。 K3：できあがった証明は思考の根拠を明らかにしながら振り返り，証明の方針の立て方を見いださせたり，確認させたりする。

工夫の２点目K2のフローチャートの活用方法について，学習指導計画第３時の授業を基に解説する。

第３時	【問題】右の図でAO＝BOである。このとき，△AOCと△BODを合同にしたい。他にどんなことがいえれば，２つの三角形が合同であるといえますか。  ①方針を立てる。 ②フローチャートを完成させ，自分の考えを表現する。 ③考えを交流し，証明のしくみをより深く考える。

第３時では，三角形の合同条件に応じて４種類のフローチャートをつくることができるオープンに探究可能な問題を扱った。証明の方針を立てる場面では，図５の完成していないフローチャートを示し，結論が△AOC≡△BODであることに着目させ，証明するためには何を示さなければならないか分析的に遡って考えさせた。そして，生徒の中から結論と仮定を結び付けるためには合同条件が必要であるという考えを導き，フローチャートを図６のように改めさせた。生徒はこのフローチャートを基に，辺や角の対応に気を付けながら自分が決めた三角形の合同条件の根拠となる要素を探り，証明のフローチャートをつくることができた。筋道立てて考えたことを交流する場面では，三組の辺がそれぞれ等しい合同条件を使うためには，他にAC＝BD，CO＝DOが分かればよいといったように，立てた方針に従って分析的に探究・検討した思考過程を口頭でしっかり表現することができた。このように，本研究においては，考えを引き出すための道具としてフローチャートを活用することとした。

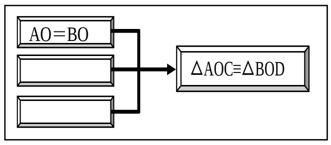


図５　フローチャート①

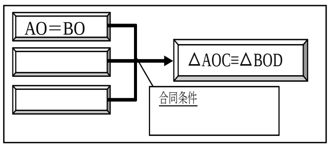


図６　フローチャート②

Ⅳ　研究の仮説と検証の視点と方法

以上のような文献研究を基に，表１に示す研究の仮説，その検証の視点と方法を設定した。

表１　研究の仮説と検証の視点と方法

研究の仮説	証明の方針を立てる活動を充実させた授業構成及び単元構成を行うことができれば,生徒は仮定から結論へ至る全体的な把握に基づく証明の構想が立てられるようになり,論理的に筋道を立てて推論する力が高まるだろう。
検証の視点	検証の方法
(1)証明の方針を立てて，証明問題に取り組もうとしたか。	ワークシート，アンケート
(2)問題の把握に基づき，適切に証明の方針を立てることができたか。	行動観察，プレテスト・ポストテスト
(3)方針を立てることで導かれた構想を基に，証明を記述することができたか。	行動観察，ポストテスト

Ⅴ　証明の方針を立てる活動を充実させた論証指導の実際

1　研究授業の計画

○　期　間　平成24年12月10日～平成24年12月20日

○　対　象　所属校第２学年（３学級100人）

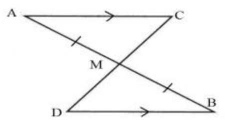
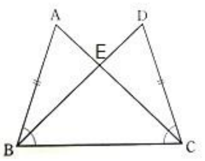
全ての研究授業を受けた生徒を調査対象とするため，調査対象者は80人となっている。

○　単元名　図形の合同

○　目　標

図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ，論理的に筋道を立てて推論する力を高める。

○　学習指導計画(全５時間)

第1時	【問題】線分 AB と線分 CD がそれぞれの中点 O で交わるならば，AC＝BD であることを証明しなさい。 ①条件に合う図を正しくかく。 ②仮定と結論を把握する。 ③穴埋め問題を埋めて，証明を完成させる。 ④フローチャートを使って証明を読み直し，証明のしくみを捉える。
第2時	【問題】右の図のように，線分 AB と線分 CD が点 M で交わるとき，AC//DB，AM＝BMならば，CM＝DMです。このことを証明しなさい。  ①方針を立てる。 ②フローチャートを使って，証明のしくみを捉える。 ③完成したフローチャートを基に記述証明を作成する。
第３時　省略	
第4時	【問題】穴埋め問題２題，記述問題２題 ①基本的な証明の書き方を確認する。 ②方針を基に証明を記述する。
第5時	【問題】下の図で，AB＝DC，∠ABC＝∠DCBならば，∠BAC＝∠CDBである。このことを証明しなさい。  ①方針を立てる。 ②立てた方針を評価する。 ③フローチャートを基に，記述証明を完成させる。 ④証明を読み直し，方針の必然性を考える。

2　研究授業の分析と考察

(1) 証明の方針を立てて，証明問題に取り組もうとしたか

研究授業の事前と事後で実施したアンケート（４段階の評定尺度法）の結果を図７に示す。なお，グラフ上の数値は人数を表している。

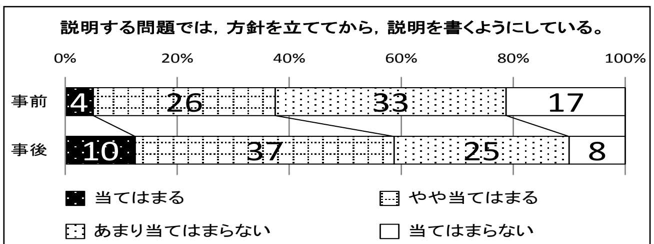


図７　事前と事後のアンケート結果の比較

図７について符号検定（片側検定）を行うと，$p<0.0001$で有意水準１％において事前と事後で差が認められ，研究授業を通して生徒は方針を立てて問題に取り組もうとしたことが分かる。同様に，授業後の自己評価からも，時数の経過とともに方針を立てて問題に取り組もうとしている生徒が増えていた。

第４時と第５時の授業後の生徒のまとめには,「自分でも方針を立てられるようになりたいです。」や「難しくなってきているけど，方針を立てると分かりやすくなった。」といった証明の方針を立てることに関する肯定的な感想が多く見られた。また，生徒Ａは図８の感想に示すように，フローチャートを活用するよさを実感していた。この生徒は，第１時から第３時まではフローチャートを方針を立てるための手立てとして用い，その後は，自分の証明に不十分な点はないか確認するために用いていた。

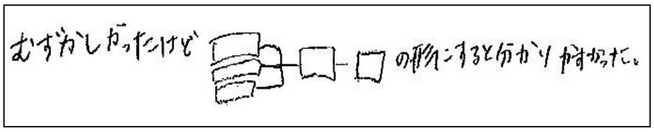
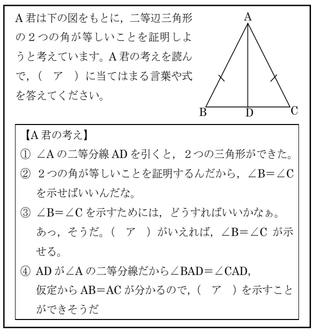


図８　生徒Ａの感想

これらのことから，証明の方針を立てる活動を充実させた授業構成及び単元構成を行うことで，生徒は方針を立てて証明問題に取り組むようになるといえるであろう。

(2) 問題の把握に基づき，適切に証明の方針を立てることができたか

生徒が適切に証明の方針を立てることができるようになったのかを検証するため，プレテストで図１の問題，ポストテストで図９の問題を使って調査を行った。図１は授業で扱った問題を出題したのに対して，図９は扱っていない問題を出題している。表２は解答類型別の人数を示したもの，表３は正答を正反応，正答以外を不反応としてクロス集計表に示したものである。


A 君は下の図をもとに，二等辺三角形の２つの角が等しいことを証明しようと考えています。A 君の考えを読んで，（　ア　）に当てはまる言葉や式を答えてください。

【A 君の考え】

① ∠A の二等分線 AD を引くと，２つの三角形ができた。

② ２つの角が等しいことを証明するんだから，∠B＝∠C を示せばいいんだな。

③ ∠B＝∠C を示すためには，どうすればいいかなぁ。あっ，そうだ。（　ア　）がいえれば，∠B＝∠C が示せる。

④ AD が∠A の二等分線だから∠BAD＝∠CAD，仮定から AB=AC が分かるので，（　ア　）を示すことができそうだ

図９　ポストテストでの調査

表３に示すように，方針を立てられなかった59人のうち，40人が方針を立てられるようになり，方針を立てることができた生徒が大幅に増えている。McNemar 検定を実施したところ，$\chi^2_{cal}=38.0>6.635=\chi^2(1, 0.01)$で有意水準１％において有意な差が

認められた。

表２　証明の方針を立てる問題の解答類型別の人数（人）

	プレ	ポスト
1　△□≡△□	9	51
2　合同（言葉による説明）	1	8
3　三角形の合同条件	11	2
4　記号間違い	6	1
5　合同条件を満たす辺や角	3	4
9　その他	10	3
0　無答	40	11

※網掛けを正答として扱う

表３　証明の方針を立てる問題のクロス集計表（人）

		ポスト	
		正反応	不反応
プレ	正反応	21	0
	不反応	40	19

具体的な生徒の変容として，表３で不反応から正反応へ変わった生徒Ｂの授業後の記述を図10に示す。

第１時の記述

証明の進め方は仮定が分からないと解けないことが分かった。

第３時の記述

仮定や錯角，対頂角で合同条件を確かめないと結論は出せない。

第５時の記述

結論が辺だったり，角だったりした場合は，まず三角形の合同条件を求めて２つの合同の三角形を出させば結論が出せる。

図10　生徒Ｂの授業後の記述

第１時のまとめで，生徒Ｂは証明を進めるためには仮定を正しく把握することの必要性を記述していた。それから学習が進むにつれ，記述の内容に変化が見られた。第３時では結論がいえるには合同条件を確かめないといけないといった分析的思考を記述し，第５時では，仮定から結論へ至るプロセスの全体的な把握，つまり証明の構想について記述していた。この記述の変化は，証明の方針に対する質的な高まりを示している。

ポストテストで不反応だった生徒は，授業では教師の支援や周りの生徒の声かけに支えられながら，黒板に書かれたフローチャートを拠り所として方針を立てていた。しかし，既習の図形の性質や数学的用語の理解が不十分なため問題を把握することからつまずいていることが多く，ポストテストでは自力で方針を立てることが難しかったと考えられる。これらの生徒については，一人一人のレディネスを明らかにし，必要な知識を補いながら実際にフローチャートを書かせることで，方針の立て方を理解させるとともに，それらの知識も徐々に身に付けさせていく指導が必要である。

次に，仮定と結論を結ぶ要素を探究・検討させた第５時の授業の様子を述べる。第５時では問題把握の後（学習指導計画参照），証明の方針を立てる活動として下の問いを与え,結論を示すための要素(ア)をワークシートに記述させることから始めた。これまでの学習を参考に，生徒のほとんどが（ア）に二つの三角形が合同であることを記述できていた。

① ∠BAC=∠CDB を証明するためには，（　ア　）を示せばよい。
② AB=DC，∠ABC=∠DCB を使うと，（　ア　）が示せそうだ。

授業では,AC と DB の交点Ｅを与えておくことで，結論を証明するために示さなければならない要素として，△ABC≡△DCB の他に，少数ではあるが，△ABE≡△DCEの意見を引き出すことができた。そして，証明のしくみを探究・検討する活動として，それぞれの方針の妥当性について評価させた。その時の話合いの様子を次に示す。

Ｔ：∠BAC＝∠CDB を示すためには，何を示せばよいだろうか。
S1：△ABC≡△DCB です。
S2：△ABE≡△DCE です。
S3：△ABE と△DCEが合同なら，そっちの方が簡単だ。
S4：でも，証明できるの？
S2：AB=DC，∠ABE＝∠DCE，∠AEB＝∠DEC なので，証明できそう。
Ｔ：AB=DC の根拠は何ですか？
S2：仮定からです。
Ｔ：∠ABE＝∠DCE の根拠は何ですか。
S2：仮定からです。
Ｔ：∠AEB＝∠DEC の根拠は何ですか。
S2：対頂角は等しいからです。
S5：∠ABE と∠DCE が等しいって言えるの？
S6：仮定には書いてない。
S7：∠ABE と∠DCE が等しいことはまだ分からないと思う。
S5：AB=DC，∠AEB＝∠DEC の他に，等しいところがいえないから合同条件が使えない。

授業での話合いの様子

生徒S5はこの話合いの中，どちらの方針が仮定と結論を結び付けるかを検討していた。そして，どちらの場合も結論を示す要素として十分であるが，一方は仮定や図形の性質から根拠を示すことができるが，他方は根拠を示すことができないことを見いだ

し，図11に見られるような二つの三角形をかいて，自分の考えをまとめていた。立てた方針を評価させ，探究・検討した内容をしっかり表現させることで，生徒S5と同様に多くの生徒が証明のしくみについて深く考えることができていた。

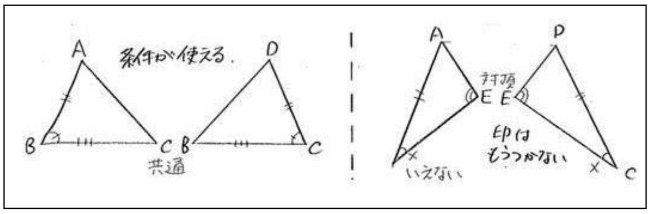


図11　S5の記述

以上のことから，K1からK3に示す工夫を取り入れた論証指導を行うことで，証明の方針を適切に立てることができるようになると考えることができる。

(3) 方針を立てることで導かれた構想を基に，証明を記述することができたか

証明の方針を立てる活動の充実が証明の記述にも作用するのかを検証するために，ポストテストにおいて，平成20年度全国学力・学習状況調査Ｂ４と同一問題で調査を実施した。表４は各設問の出題の趣旨と，平成20年度の都道府県別の広島県の調査結果と所属校の結果を比較して比率差の検定(両側検定)を行った結果を示している。

表４　調査問題における所属校と広島県との比較

			所属校	広島県
Ｂ４	出題の趣旨	被験者数	80人	22633人
（１）	証明の方針を立てる際に根拠となる事柄を考えることができる。（4択問題）	正答率	80.0%	60.3%
		比率差の検定	ｐ＝0.0003	
（２）	方針に基づいて証明することができる。（記述問題）	正答率	57.5%	42.2%
		比率差の検定	ｐ＝0.0057	

平成24年６月に実施した「基礎・基本」定着状況調査の所属校の通過率76.5%と県の通過率74.1%を比較してＺ検定（両側検定）を行ったところ，ｐ＝0.317で有意水準５%において差は認められなかった。しかし，ポストテストで実施した問題についてはどちらも有意水準１%において差が認められ，生徒は証明ができるようになったと考えられる。記述問題（２）の無解答率も，広島県が29.6%に対して，所属校が22.5%とよい結果となった。これらの結果は，証明の方針を立てる活動を充実させることが，証明の記述にもよい影響を及ぼしたことを示唆している。同様のことが，「証明のイメージができたから，証明が書きやすくなった。」という生徒のつぶやきからも指摘できる。二つの比較対象では，学習から調査までの期間が異なるなど条件が同じでないため一概には言い切れないが，証明を記述できるようになる上で，方針を立てる活動を充実させることが重要であるといえる。

続いて，授業の様子から考察を行う。第２時では，図12に示す生徒Ｃの記述のように，立てた方針を基に学級で練り合いながらフローチャートを作成し，多くの生徒が証明の構想をもつことができていた。しかし，記述の仕方が定着しておらず，実際に証明を書く場面で手が止まってしまう生徒が多く見られた。そこで，図13のように穴埋めの課題として記述証明を与え，それを埋めることで証明を記述させた。

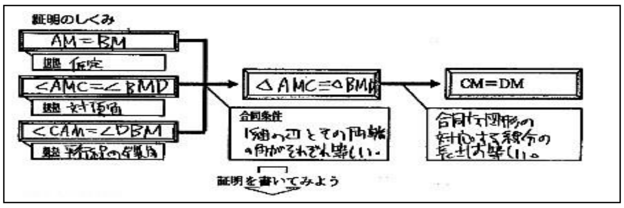


図12　生徒Ｃの第２時での記述①

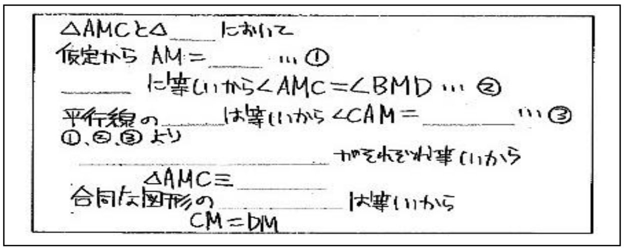


図 13　生徒Ｃの第２時での記述②

第２時以降，フローチャートを活用しながら方針を立て，それを基に証明の記述をさせる学習を進める中で，生徒の中から「説明できるけど，どのように証明を書いたらいいか分からない」という意見が多く出てきた。そのため，当初計画していた第４時の授業展開を変更し，証明の書き方を示した「７行証明」(1)を参考に図14に示すプリントを使い，フローチャートを活用して考え表現したことを証明の記述に結び付ける学習を行い，その習熟を図った。

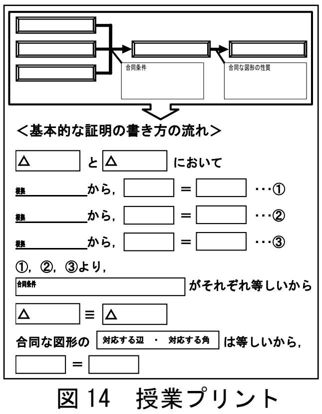
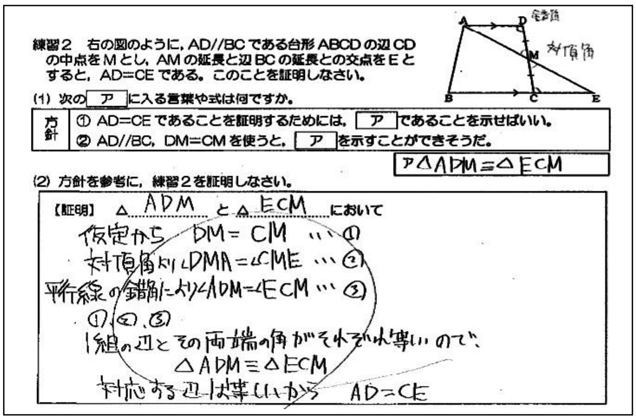


図 14　授業プリント

第５時の練習問題では，次のページの図15

に示す生徒Cの記述のように，根拠を明らかにしながら仮定と結論を結ぶ要素を探究し，証明を記述することができる生徒が増えた。


練習２　右の図のように，AD//BC である台形 ABCD の辺 CD の中点をＭとし，AM の延長と辺 BC の延長との交点をＥとすると，AD=CE である。このことを証明しなさい。

(1) 次の ア に入る言葉や式は何ですか。

方針　① AD=CE であることを証明するためには，ア であることを示せばいい。
② AD//BC，DM=CM を使うと，ア を示すことができそうだ。

ア △ADM≡△ECM

(2) 方針を参考に，練習２を証明しなさい。

【証明】 △ADM と △ECM において
仮定から DM＝CM …①
対頂角より ∠DMA＝∠CME …②
平行線の錯角により ∠ADM＝∠ECM …③
①，②，③
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，
△ADM≡△ECM
対応する辺は等しいから AD＝CE

図15　生徒Cの第５時での記述

しかし，証明の記述に対する指導には課題も残った。証明の構造をしっかり理解できるまでは書き方の指導も大切であり，第１時から計画的に，方針を立てることと証明を記述することを密接に関連付けながら論証指導を行うことが必要であった。

Ⅵ　研究の成果と課題

１　研究の成果

以上のような文献研究や研究授業の結果から，論理的に筋道を立てて推論する力を高めるには，証明の方針を立てる活動が有効であることが明らかになった。そして，その具体的な工夫を３点提案することができた。

数学嫌いの子どもの割合は小学校で３割，中学校で５割，高校で７割と言われるが，その要因の一つは，論理的に筋道立てて推論することが不可欠な求証問題(2)が，学年が上がるにつれて増えることが考えられる。証明の学習は生徒が求証問題に本格的に触れ，構想の働きを実感する重要な単元である。しかし，証明の形式についての指導だけで，証明のしくみを分からせたつもりで終わっている授業は少なくない。それでは，方針を立て論理的に考えを進める力は十分に高められず，求証問題を多く扱う高校数学に対応できないであろう。こうした中高連携の側面からも，論証指導において方針を立てる活動に焦点を当て，その具体的な工夫を提案できたことは意義があると考える。

２　今後の課題

本研究では，論証指導のアプローチを大きく四つに分類し，その中から構想に焦点を当てたアプローチに取り組んだ。しかし，論証指導は構想に焦点を当てたアプローチだけで完結するものではない。構想を立てるには図形の概念の理解を欠かすことはできないし，立てた構想は数学的な表現として記述しなければならない。そのため，本研究で得られた知見を他のアプローチと関わらせながら，論証指導の在り方を創造していくことが強く求められる。

【注】

(1) 曽根崎高志（1998）：「How to Answer　証明問題」『数学教育　No.492』明治図書 pp.51-57に詳しい。

(2) 金子忠雄（1994）：「図形と論証の指導の系統」『CRECER 第６巻 図形と論証』ニチブン p.249-252に詳しい。

【引用文献】

1)　文部科学省（平成20年ａ）：『中学校学習指導要領解説 数学編』教育出版 p.39

2)　文部科学省（平成20年ｂ）：『小学校学習指導要領解説 算数編』東洋館出版社 p.20

3)　文部科学省（平成20年ａ）：前掲書 p.96

4)　宮崎樹夫（2004）：「中学校数学図形領域における論証に関する研究」『日本数学教育学会　第37回数学教育論文発表会論文集』 p.457

5)　清水静海（1994）：「論証」『CRECER 第６巻 図形と論証』ニチブン p.207

6)　辻山洋介（2010）：「学校数学における証明の構想の意義に関する研究」『日本数学教育学会誌　数学教育学論究 95』 p.29

7)　Ｇ．ポリア（昭和29年）柿内賢信訳：『いかにして問題を解くか』丸善出版 p.12

8)　国立教育政策研究所教育課程研究センター（2006）:『特定の課題に関する調査（算数･数学）調査結果』 p.36

9)　神原一之（2010）：「証明の見通しをもたせるためには」『数学教育　No. 637』明治図書 p.38

10)　片桐重男（1988）：『数学的な考え方とその指導』明治図書 p.48

11)　廣瀬真琴（2010）：「『見通し・振り返り』学習活動と自己評価」『各教科での『見通し・振り返り』学習活動の充実』教育開発研究所 p.74

【参考文献】

勝野学（2012）：「方針にもとづく証明指導のあり方」『第８回啓林館「教育実践賞」』

湯本武司（2007）：「フローチャートを用いて証明の学習指導を改善する」『日本数学教育学会誌 数学教育 89 巻』 pp. 7 -22